

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

Сибирский институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн

С. И. Вайнштейн

А. М. Быков

И. Н. Топтыгин

**ТУРБУЛЕНТНОСТЬ,
ТОКОВЫЕ СЛОИ
И УДАРНЫЕ ВОЛНЫ
В КОСМИЧЕСКОЙ
ПЛАЗМЕ**

Ответственный редактор
доктор физико-математических наук
Ю. Н. ГНЕДИН



МОСКВА «НАУКА» 1989

Турбулентность, токовые слои и ударные волны в космической плазме/С. И. Вайнштейн, А. М. Быков, И. Н. Топтыгин.— М.: Наука, 1989.—311 с. ISBN 5-02-000705-6.

Монография посвящена нестационарным процессам в космической плазме, играющим важную роль в астрофизике. Рассмотрены теория турбулентности, в том числе ее новейшие достижения, динамика магнитных полей в космических условиях (в частности, теория динамо), процессы быстрого превращения энергии. Подробно обсуждается физика токовых слоев. Показана неизбежность возникновения токовых слоев в астрофизических условиях. Специальная глава посвящена солнечной магнитной гидродинамике.

Подробно рассмотрены ударные волны, столкновительные и бесстолкновительные, а также солитоны и другие нелинейные волны в космической плазме. Обсуждаются механизмы их генерации и распространения в неоднородных и случайно-неоднородных средах. Теория применена к проблемам генерации ударных волн и турбулентности в межпланетной и межзвездной плазме.

Рассчитана на научных работников, занимающихся вопросами активных процессов космической электродинамики.

Ил. 52. Библиогр.: 413 назв.

Turbulence, current sheets and shocks in cosmical plasma/ S. I. Vainshtein, A. M. Bykov, I. N. Toptygin.— Moscow: Nauka, 1989.—311 p.

The monograph is devoted to main problems of cosmical electrodynamics: current sheet formation, turbulence and shocks. Current sheets are formed due to cosmical plasma motions, in particular, resulting in either increased dissipation of magnetic field (as at the frontal point and in the tail region of the Earth's magnetosphere), or its generation i. e. dynamo.

Current sheets appear also as a result of equilibrium loss of magnetic configurations, in particular, in the solar corona leading to heating of the upper parts of Solar atmosphere, Solar flares and other active phenomena.

The monograph can be recommended for scientists, which are interested in active processes in cosmical electrodynamics.

Ил. 52. Bibliogr.: 413 ref.

Рецензенты: В. А. ДЕРГАЧЕВ, В. М. МИШИН

1605040000-309
В $\frac{055(02)-89}{133-89}$ кн. 2

ISBN 5-02-000705-6

© Издательство «Наука», 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для космической плазмы характерны процессы быстрого преобразования энергии и нестационарные состояния, весьма далекие от равновесия. Это прежде всего вспышечные процессы различных масштабов: магнитосферные суббури с энерговыделением до 10^{23} эрг, солнечные вспышки (10^{32} эрг), вспышки новых (10^{47} эрг) и сверхновых (10^{51} эрг) звезд. Солнечная активность, солнечный и звездные ветры, аккреция, турбулентные состояния космической плазмы, ускорение частиц и образование высокоэнергичной надтепловой компоненты (космических лучей с энергиями до 10^{20} эВ) — все это типичные проявления нестационарных процессов.

Перечисленные выше явления, различные как по своей природе, так и по масштабам, имеют и сходные черты, обусловленные универсальными свойствами физических механизмов накопления, а в особенности выделения и распространения энергии. Это обстоятельство позволяет исследовать с общих позиций как сами явления нестационарного выделения энергии, так и их влияние на макроскопические параметры окружающей среды, генерацию магнитного поля, генерацию и распространение электромагнитного излучения, ускоренных частиц и т. п.

Несмотря на широкую распространенность таких процессов и их интенсивное исследование, в научной литературе имеется небольшое число книг, которые бы обобщали полученные результаты, включая и новейшие данные, и относились к достаточно широкому кругу явлений. Число обзорных статей, посвященных нестационарным процессам в плазменной астрофизике, также относительно невелико. Это и побудило авторов написать настоящую монографию. В ней изложена теория нестационарных и неравновесных процессов в космической плазме.

Разумеется, ввиду необъятности относящегося к этой области явлений материала авторы смогли отразить лишь некоторые, но достаточно важные аспекты этой проблемы. Прежде всего мы старались сформулировать общие понятия и представления, а также методы математического описания нестационарных явлений, таких, как турбулентность, ударные и другие нелинейные волны, токовые слои, генерации магнитного поля.

Наряду с изложением общей теории в монографии рассмотрены и некоторые ее приложения. Они в значительной мере отражают личные вкусы и пристрастия авторов. Это, с одной стороны, вопросы солнечной активности, с другой — турбулентность межзвездной и межпланетной плазмы.

Для того чтобы расширить круг возможных читателей книги, мы старались излагать материал на двух уровнях детализации.

Первые две главы должны служить введением в изучаемую область. В них сравнительно подробно изложены основные сведения из магнитной гидродинамики и физики плазмы, а также механики сплошных сред, на которых базируется дальнейшее рассмотрение. Последующий материал (гл. 3—10) носит более специальный характер и базируется на современных исследованиях, опубликованных в научной периодике, в том числе на результатах, полученных авторами.

Эту монографию, разумеется, нельзя рассматривать как обзор всех или большинства работ, выполненных по нестационарным и неравновесным явлениям в космической плазме. Поэтому мы ссылаемся только на те работы, которые непосредственно использовались авторами при написании книги или содержат полезные дополнительные материалы, тесно связанные с ее содержанием. Уместно здесь сказать и о том, что в рамках единого замысла книги и искреннего стремления авторов к унификации стиля изложения неизбежно имеются особенности и даже различия в построении и изложении материала в разных главах. Это обусловлено в значительной степени как принадлежностью авторов к разным научным школам, так и некоторым различием их научных пристрастий. Мы надеемся тем не менее, что это обстоятельство не доставит читателю неудобства, а начинающему исследователю, возможно, будет и полезной демонстрацией различных подходов к анализу задачи.

Авторы благодарны доктору физико-математических наук А. М. Яглому и члену-корреспонденту АН СССР В. И. Татарскому за обсуждение ряда вопросов по теории турбулентности, В. Н. Обридко и В. М. Григорьеву за замечания и советы, касающиеся солнечной активности и магнитных полей.

Решающее значение для уровня почти всех глав книги имели замечания проф. Е. Н. Паркера о турбулентной диффузии магнитного поля в нелинейном режиме (разд. 4.13) и многочисленные обсуждения с ним физики токовых слоев и их реализации в солнечной атмосфере (гл. 5—7).

Неоценимую помощь нам оказала дискуссия с д-ром Р. Крейкнаном по турбулентному динамо крупномасштабных полей (разд. 4.12, 4.14). Мы благодарны ему за присланные последние обзоры, которые помогли нам описать современную теорию турбулентности (гл. 4).

Вопросы строго пересоединения магнитных полей в астрофизических условиях (разд. 6.3, 6.4, 6.9) мы неоднократно обсуждали с Э. Р. Пристом и Д. Бискампом. Чрезвычайно полезными оказались присланные ими статьи и обзоры. Мы благодарны также другим авторам, представившим нам свои материалы: Г. Моффату, У. Фришу, А. Соварду, К. Рэдлеру, Д. Сакаи, С. Ву, Дж. Али, Дж. Г. Ломинадзе, Т. Т. Цапу, Е. А. Руденчику, Л. М. Зеленому, С. В. Буланову, Э. П. Кропачеву, Ю. А. Бродскому, А. Ф. Харшиладзе, М. В. Незлину, А. В. Гетлингу, У. Матеосу, Д. Монтгомери, П. Бауму, А. Братенелу, Б. Дарни, А. Рихтеру.

Глава 1. КОСМИЧЕСКАЯ ПЛАЗМА В ТИПИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

1.1. Основные уравнения космической электродинамики

Электромагнитные процессы играют в астрофизических условиях чрезвычайно важную роль. В частности, основные сведения об астрономических объектах мы получаем с помощью электромагнитного излучения. Поскольку предметом последующего рассмотрения будут процессы с участием заряженных частиц и электромагнитного поля, обсудим основные уравнения, а также приближения, используемые при их описании.

Микроскопическое описание плазмы. Последовательное описание системы заряженных частиц в рамках классической кинетической теории можно осуществить с помощью микроскопической функции распределения частиц — фазовой плотности. Состояние системы заряженных частиц полностью определено, если известна совокупность обобщенных координат и импульсов частиц $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}\}$, а также электромагнитное поле в пространстве. Введем фазовую плотность частиц сорта a посредством соотношения

$$F_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{N_a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)); \quad (1.1)$$

здесь индекс i нумерует частицы, полное число которых N_a ; $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{p}_i(t)$ — координата и импульс i -й частицы. Определенная таким образом микроскопическая функция распределения удовлетворяет уравнению неразрывности в шестимерном фазовом пространстве координат и импульсов частиц:

$$\partial_t F_a + \mathbf{v} \partial_r F_a + \dot{\mathbf{p}} \partial_p F_a = 0, \quad (1.2)$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ — скорость частицы; $\dot{\mathbf{p}}$ равно силе, действующей на частицу, она включает в себя электромагнитную силу Лоренца и имеющиеся силы неэлектромагнитного происхождения \mathbf{f}_{ne} (гравитационные и т. п.):

$$\dot{\mathbf{p}} = e_a \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + (e_a/c)[\mathbf{v} \mathbf{B}] + \mathbf{f}_{ne}. \quad (1.3)$$

Предполагаем, что сорт частиц a не меняется при взаимодействии. Неупругие процессы ионизации, возбуждения атомов и ионов и т. п. требуют квантовомеханического расчета элементарных актов и затем могут быть включены в развиваемую ниже схему. Электромагнитное поле в (1.3) удовлетворяет уравнению

Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi (\rho + \rho_{\text{ext}}), \quad (1.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = (-1/c)\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi/c)(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ext}}) + (1/c)\partial_t \mathbf{E}. \quad (1.7)$$

Источники самосогласованного микроскопического электромагнитного поля в уравнениях (1.4) и (1.7) связаны с фазовой плотностью соотношениями

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \int F_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \int \mathbf{v} F_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (1.9)$$

Внешние по отношению к рассматриваемой системе плотность заряда $\rho_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ и плотность тока $\mathbf{j}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$ должны, разумеется, быть заданы наряду с самосогласованной частью сил \mathbf{f}_{ne} .

Итак, при заданных внешних силах и внешних источниках поля эволюция системы частиц может быть полностью описана системой уравнений для микроскопической функции распределения и напряженностей электромагнитного поля (1.4) и (1.6) — (1.9). При таком описании не требуется вводить более сложные функции распределения. Представленное описание системы частиц эквивалентно решению точной динамической задачи, оно содержит большой объем информации о начальных значениях координат и импульсов всех $\sum_a N_a$ частиц, а также о полях в начальном момент времени.

Поскольку в задачах космической электродинамики и вообще в макроскопических задачах информация о начальных данных, как правило, отсутствует, обычно используется статистическое описание системы заряженных частиц.

Статистическое описание плазмы. При переходе к статистическому описанию проводится усреднение фазовой плотности (1.1) и электромагнитных полей по ансамблю одинаково устроенных систем с различными начальными условиями. Однако при статистическом описании микроскопической фазовой плотности (1.1) оказывается недостаточно и необходимо ввести более сложные функции распределения. Наиболее полное статистическое описание системы, состоящей из N частиц, достигается путем введения N -частичной статистической функции распределения

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t) = \langle F^{(N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t) \rangle, \quad (1.10)$$

где $F^{(N)}$ — N -частичная фазовая плотность:

$$F^{(N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t) = (1/N_1! \dots N_a! \dots) \times \\ \times \sum_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_a(t)) \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_a(t)) \dots \delta(\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_a(t)) \delta(\mathbf{p}_N - \mathbf{p}_a(t)). \quad (1.11)$$

Здесь сумма берется по всем перестановкам одинаковых частиц, а число векторных аргументов (\mathbf{r}, \mathbf{p}) равно полному числу частиц $N = \sum_a N_a$ в системе. Угловые скобки в (1.10) обозначают усреднение по ансамблю начальных условий.

Статистическая функция распределения D является микроскопической, она реализует максимально полное вероятностное описание системы. Вероятность нахождения частиц в соответствующих элементах $d\mathbf{r}d\mathbf{p}$ фазового пространства в момент времени t дается выражением

$$dW = D(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{p}_1 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N. \quad (1.12)$$

Статистическая функция распределения D удовлетворяет уравнению неразрывности в $6N$ -мерном фазовом пространстве всей системы, она учитывает в полной мере все корреляции частиц и полей. Для решения многих задач достаточно использовать более простое, но менее детальное описание системы. Оно достигается путем введения одночастичной

$$f_a^{(1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1, t) = N_a \int D(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \dots; \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{r}_2 d\mathbf{p}_2 \dots \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N = \langle F_a(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \rangle, \quad (1.13)$$

двухчастичной

$$f_a^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2; t) = N_a(N_a - 1) \times \int D(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \dots; t) d\mathbf{r}_3 d\mathbf{p}_3 \dots d\mathbf{r}_N d\mathbf{p}_N \quad (1.14)$$

и других многочастичных функций распределения и сопровождается частичным или полным пренебрежением эффектами корреляции отдельных частиц. Наиболее часто используются одночастичные и двухчастичные функции распределения $f_a^{(1)}$ и $f_a^{(2)}$. В частности, одночастичная функция распределения позволяет определить практически все макроскопические параметры системы. Последовательная процедура получения цепочки связанных уравнений для многочастичных функций распределения исходя из уравнения неразрывности для функции $D(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1; \dots; t)$ предложена Боголюбовым [16]. Вывод кинетических уравнений для одночастичной функции распределения основывается, как правило, на обрыве цепочки связанных уравнений для многочастичных функций, т. е. замыкания системы. Способ замыкания существенно зависит от характера взаимодействия частиц, степени неравновесности системы, концентрации частиц и т. д. В слабонеравновесной плазме, характеризуемой температурой T и концентрацией заряженных частиц n , при условии малости средней энергии взаимодействия частиц по сравнению с их кинетической энергией

$$e^2 n^{1/2} / T \approx (nd^3)^{-2/3}, \quad (1.15)$$

(где $d = (T/8\pi n e^2)^{1/2}$ — радиус Дебая) корреляционные эффекты малы. Такая плазма может быть описана в приближении самосогласованного поля. С учетом корреляционных эффектов в низшем порядке по взаимодействию частиц получается кинетическое уравнение вида

$$\partial_t f_a^{(1)} + \mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}} f_a^{(1)} + \dot{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} f_a^{(1)} = \sum_b \text{St}(f_a^{(1)}, f_b^{(1)}). \quad (1.16)$$

Сила, определяющая $\dot{\mathbf{p}}$ согласно (1.3), в данном уравнении определяется средними самосогласованными полями, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла (1.6)—(1.9). Эти уравнения становятся макроскопическими и описывают среднее самосогласованное поле, если в формулах (1.8), (1.9) для источников поля микроскопическую фазовую плотность заменить одночастичной статистической функцией распределения $f_a^{(1)}$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \int f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \int \mathbf{v} f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (1.18)$$

Столкновительный оператор в правой части (1.16) определяет изменения функции распределения, связанные с взаимодействием частиц в сфере радиуса Дебая. Наиболее часто используются интегралы столкновений в форме Ландау, а также Балеску—Ленарда [8, 98, 152]. Столкновительный оператор описывает процессы релаксации в системе и определяет через кинетические коэффициенты диссипативные характеристики плазмы. Мы не будем здесь приводить явный вид столкновительного оператора, детальное обсуждение свойств, а также явный вид коэффициентов переноса в плазме можно найти в монографиях [19, 9]. Ограничимся лишь оценками для частот кулоновских соударений различных частиц в плазме, определяющих столкновительную релаксацию. Электрон-электронные соударения происходят с частотой ν_{ee} , определяемой как

$$\nu_{ee} = 4 \sqrt{2\pi} L e^4 z^2 n_i / 3 \sqrt{m_e T_e^{3/2}}, \quad (1.19)$$

где m_a — масса частиц сорта a ; L — кулоновский логарифм [19]; считается выполненным условие квазинейтральности плазмы: $n = n_e = z n_i$. Частота ион-ионных соударений

$$\nu_{ii} = (m_e/2m_i)^{1/2} \nu_{ee}. \quad (1.20)$$

Наконец, существенную роль играет частота ν_{ei} , определяющая релаксацию температуры электронов и ионов, она имеет порядок величины

$$\nu_{ei} = (m_e/m_i) \nu_{ee}. \quad (1.21)$$

Процессы в плазме, частоты ω которых превышают частоты соударений компонент плазмы ($\omega \gg \nu_{ee}, \dots$), называют бесстолкновительными. В другом предельном случае $\omega \ll \nu_{ii}$ соответствующим

щие процессы считают столкновительными. Часто просто говорят о столкновительной или бесстолкновительной плазме.

Магнитогидродинамическое описание столкновительной плазмы. В столкновительной плазме (недра и атмосфера звезд и Солнца, солнечная хромосфера и корона, ионосфера Земли), где параметры медленно меняются на временах между кулоновскими соударениями частиц и на расстояниях, больших длины свободного пробега частиц, решение кинетического уравнения (1.16) близко к локально максвелловскому распределению

$$f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n_a(\mathbf{r}, t)(2\pi m_a T_a(\mathbf{r}, t))^{-3/2} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(\mathbf{p} - m_a \mathbf{u}_a(\mathbf{r}, t))^2}{2m_a T_a(\mathbf{r}, t)}\right\} + \delta f_a^{(1)}, \quad (1.22)$$

в котором макроскопические параметры n_a , T_a , \mathbf{u}_a (концентрация, температура и средняя скорость a -компоненты плазмы) изменяются в пространстве и во времени. Поправка $\delta f_a^{(1)}$ мала по сравнению с максвелловским слагаемым в (1.22) и выражается через градиенты макроскопических параметров, ее вычисление на основе (1.16) позволяет определить коэффициенты переноса в столкновительной плазме [19]. Макроскопические параметры плазмы связаны с функцией распределения $f_a^{(1)}$ посредством следующих соотношений:

$$n_a(\mathbf{r}, t) = \int f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.23)$$

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int \mathbf{v} f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.24)$$

$$T_a(\mathbf{r}, t) = \frac{m_a}{3n_a} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)^2 f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.25)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(a)}(\mathbf{r}, t) = m_a \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)_\alpha (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)_\beta f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{q}_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} m_a \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)^2 \mathbf{v} f_a^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (1.27)$$

Полный тензор $\Pi_{\alpha\beta}^{(a)}$ давления частиц сорта a связан со скалярным давлением $P^{(a)}$ так:

$$\Pi_{\alpha\beta}^{(a)} = P^{(a)} \delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta}^{(a)}; \quad (1.28)$$

здесь $\delta_{\alpha\beta}$ — единичный симметричный тензор второго ранга; $\sigma_{\alpha\beta}^{(a)}$ — тензор вязких напряжений (см. подробнее [9, 19]). Вектор \mathbf{q}_a есть плотность потока тепла, переносимого частицами сорта a . Кинетическое уравнение (1.16) в столкновительной плазме имеет решение (1.22), параметры его удовлетворяют системе уравнений непрерывности массы, импульса и энергии:

$$\partial_t n_e + \partial_{\mathbf{r}}(n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (1.29)$$

$$\partial_t n_i + \partial_{\mathbf{r}}(n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (1.30)$$

$$m_e n_e d_t u_{e\alpha} = -\partial_{r\beta} \Pi_{\alpha\beta}^{(e)} - e n_e (E_\alpha + (1/c)[\mathbf{u}_e \mathbf{B}]_\alpha) + R_\alpha, \quad (1.31)$$

$$m_i n_i d_t u_{i\alpha} = -\partial_{r\beta} \Pi_{\alpha\beta}^{(i)} + z e n_i (E_\alpha + (1/c)[\mathbf{u}_i \mathbf{B}]_\alpha) - R_\alpha, \quad (1.32)$$

$$^{3/2} n_e d_t T_e + P^{(e)} \operatorname{div} \mathbf{u}_e = -\operatorname{div} \mathbf{q}_e - \sigma_{\alpha\beta} \partial_{r\beta} u_{e\alpha} + Q_e, \quad (1.33)$$

$$^{3/2} n_i d_t T_i + P^{(i)} \operatorname{div} \mathbf{u}_i = -\operatorname{div} \mathbf{q}_i - \sigma_{\alpha\beta} \partial_{r\alpha} u_{i\alpha} + Q_i, \quad (1.34)$$

где Q_a — источник столкновительного выделения тепла:

$$Q_a = \sum_{a,b} \frac{1}{2} m_a (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a)^2 \operatorname{St} (f_a^{(1)}, f_b^{(1)}) d\mathbf{p};$$

R_a — сила трения компонент:

$$\mathbf{R}_a = \sum_b \int m_a (\mathbf{v} - \mathbf{u}_a) \operatorname{St} (f_a^{(1)}, f_b^{(1)}) d\mathbf{p}. \quad (1.35)$$

Символ полной производной по времени в уравнениях (1.26)—(1.29) следует понимать как материальную производную $d_t = \partial_t + \mathbf{u}_a \partial_{\mathbf{r}}$. Давление компонент связано с температурой уравнением состояния, которое в приближении идеального газа имеет вид

$$P_a = n_a T_a = \bar{R} \rho T; \quad (1.36)$$

здесь \bar{R} — газовая постоянная. Вектор плотности потока тепла \mathbf{q} , тензор вязких напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$, а также источники тепла $Q_{e,i}$ выражаются через градиенты скоростей $\mathbf{u}_{e,i}$ и температур $T_{e,i}$. Соответствующие коэффициенты вязкости и теплопроводности анизотропны при наличии магнитного поля и являются тензорами, вид которых приведен, например, в [9, 19].

Система уравнений (1.29)—(1.34) вместе с уравнениями состояния (1.36), уравнениями связи, позволяющими выразить диссипативные характеристики \mathbf{R} , $\sigma_{\alpha\beta}$, \mathbf{q} через градиенты макроскопических параметров, и уравнениями Максвелла (1.4)—(1.7) дает двухжидкостное описание столкновительной плазмы. Плотности тока и заряда в уравнениях Максвелла нужно выразить через макроскопические параметры:

$$\mathbf{j} = e (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e), \quad \rho_e = e (n_i - n_e). \quad (1.37)$$

Для процессов с частотой $\omega \lesssim v_{ii}$ скорости \mathbf{u}_e и \mathbf{u}_i близки и могут считаться просто макроскопической скоростью плазмы \mathbf{u} . Температуры электронов и ионов при этом будут, вообще говоря, различными. В этих условиях плотность электрического тока удовлетворяет обобщенному закону Ома

$$\{\mathbf{E} + (1/c)[\mathbf{u} \mathbf{B}] - (c/n_e e)[\mathbf{j} \mathbf{B}]\}_\alpha = -(1/n_e e) \partial_{r\beta} \Pi_{\alpha\beta} + R_\alpha / n_e e. \quad (1.38)$$

Для еще более медленных процессов ($\omega \ll v_{ei}$) достаточно ограничиться одножидкостным описанием плазмы. Если при этом можно пренебречь диссипативными процессами — вязкостью,

теплопроводностью и джоулевым тепловыделением, то система уравнений идеальной МГД записывается следующим образом:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad (1.39)$$

$$p = p(s, \rho); \quad (1.40)$$

$$\rho (\partial_t + (\mathbf{u} \nabla)) \mathbf{u} = -\nabla p + (1/4\pi) [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}], \quad (1.41)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \mathbf{B}], \quad (1.42)$$

$$\partial_t s + (\mathbf{u} \nabla) s = 0; \quad (1.43)$$

здесь s — удельная энтропия; $p(s, \rho)$ — давление, выраженное через плотность и энтропию с помощью уравнения состояния.

Если диссипативные процессы необходимо принять во внимание, но магнитное поле невелико, так что коэффициенты вязкости (η и ζ), теплопроводности κ и электропроводности σ можно считать скалярными величинами, то в правые части уравнений (1.41)—(1.43) добавляются диссипативные члены, а (1.38) упрощается:

$$\partial_t \rho u_i = -\partial_j \Pi_{ij} + F_i, \quad (1.44)$$

$$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} + B_i B_j / 4\pi - B^2 \delta_{ij} / 8\pi + \sigma_{ij},$$

$$\sigma_{ij} = \kappa (\partial_j u_i + \partial_i u_j - 2/3 \delta_{ij} \partial_f u_f) + \zeta \delta_{ij} \partial_f u_f,$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \mathbf{B}] - \operatorname{rot} \eta \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (1.45)$$

$$\eta = c^2 / 4\pi \sigma = l_p^2 \nu_{ei}, \quad l_p = c / \omega_p,$$

$$\rho T d_t s = \sigma_{\alpha\beta} \partial_{r_\beta} u_\alpha + \kappa \Delta T + (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 c^2 / 16\pi^2 \sigma, \quad (1.46)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + c^{-1} [\mathbf{u} \mathbf{B}]), \quad \sigma = ne^2 / m_e = \omega_p^2 / 4\pi \nu_{ei}, \quad (1.47)$$

где ω_p — плазменная частота электронов; \mathbf{F} — внешняя сила. В астрофизике, как правило, ограничиваются силой тяжести

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{g} \quad (1.48)$$

(\mathbf{g} — ускорение свободного падения). Уравнения (1.39), (1.40) остаются в силе.

Очень часто можно ограничиваться приближением несжимаемости, применимым при скорости u , меньшей скорости звука c_s , и $\rho = \text{const}$. Тогда (1.44) упрощается:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p / \rho + [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] / 4\pi - \operatorname{rot} \tilde{\nu} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad (1.49)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad (1.50)$$

здесь $\tilde{\nu} = \chi / \rho$ — кинематическая вязкость. Безразмерный параметр

$$\operatorname{Re} = ul / \tilde{\nu} \quad (1.51)$$

(l — характерный масштаб поля скорости) называют числом Рейнольдса. Как правило, $\operatorname{Re} \gg 1$, так что последним членом правой части (1.49) во многих случаях пренебрегают. Если $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq$

$\neq 0$, то уравнение (1.49) остается таким же, только вязкий член усложняется. Малость числа Маха $M = u/c_s$ характерна для большого класса процессов. Что касается условия $\rho = \text{const}$, то оно нередко нарушается. Например, в конвективной зоне Солнца плотность меняется на несколько порядков. Но флуктуации плотности ρ' в данной точке малы: $\rho' \ll \rho$. В этом случае условие нежимаемости обобщается

$$\text{div } \rho \mathbf{u} = 0, \quad (1.52)$$

в то время как уравнение (1.49) остается неизменным (см. также разд. 7.2).

Отметим, наконец, что слабоионизованная плазма (солнечная фотосфера, ионосфера Земли) не приводит к принципиальным затруднениям. Благодаря частым столкновениям ионов с нейтралами газ последних практически неподвижен относительно ионов. Это приводит к тому, что плотность ρ , которая фигурирует в уравнениях, суть плотность нейтралов (поскольку их намного больше, чем ионов). Меняются также сами кинетические коэффициенты η , χ , ζ , но не настолько, чтобы изменить специфические свойства космической электродинамики, речь о которой пойдет в следующем разделе.

Бесстолкновительная плазма (солнечный ветер, магнитосфера Земли). Рассмотрим кратко бесстолкновительную плазму (подробнее см., например, в [52, 91]). Если частота процесса велика по сравнению с частотами соударений заряженных частиц ν_{ee} , то в условиях применимости одночастичного описания в уравнении (1.16) можно опустить интеграл столкновений. Бесстолкновительное уравнение, называемое уравнением Власова,

$$\partial_t f_a^{(1)} + \mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}} f_a^{(1)} + \dot{\mathbf{p}} \partial_{\mathbf{p}} f_a^{(1)} = 0 \quad (1.53)$$

и уравнения Максвелла (1.4)–(1.7) служат в совокупности основной описания бесстолкновительной плазмы и называются системой уравнений среднего самосогласованного поля. В отличие от уравнений гидродинамического типа, к которым сводится описание плазмы со столкновениями, в системе уравнений для бесстолкновительной плазмы функция $f_a^{(1)}$ зависит от семи переменных. Для бесстолкновительной плазмы в сильных магнитных полях допустимы определенные упрощения, уменьшающие число независимых переменных на два. Если магнитное поле достаточно велико, так что гирочастота частицы $\omega_a = eB/cm_a$ много больше частоты рассматриваемого процесса, то можно усреднить уравнения по быстрому вращению частиц в магнитном поле. Такое усреднение позволяет перейти к приближению ведущего центра (дрейфовому приближению), если $\omega_a \gg \omega$ и ларморовский радиус частицы плазмы $r_a = cP_a/eB$ мал по сравнению с характерным масштабом изменения магнитного поля. Система уравнений ведущего центра записывается для макроскопических параметров ρ , \mathbf{u} , \mathbf{B} и E_{\parallel} , а также для функции распределения $\tilde{f}_a^{(1)}(\mathbf{r}, P_{\parallel}, t)$,

зависящей от пяти независимых переменных [91]. Здесь во всех формулах знаками \parallel и \perp обозначены продольное и поперечное направления относительно магнитного поля:

$$\rho d_t u_\alpha = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]_\alpha - \partial_{r_\beta} \tilde{\Pi}_{\alpha\beta}, \quad (1.54)$$

$$\tilde{\Pi}_{\alpha\beta} = P_\perp \delta_{\alpha\beta} + (P_\parallel - P_\perp) b_\alpha b_\beta, \quad (1.55)$$

$$P_\perp = \sum_a \int dp \hat{f}_a^{(1)} P_\perp^2 / 2m_a, \quad (1.56)$$

$$P_\parallel = \sum_a \int dp \frac{\omega}{a} (P_\parallel - m_a \mathbf{u} \mathbf{b})^2 / m_a,$$

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{f}_a^{(1)} + (\mathbf{u}_E + v_\parallel \mathbf{b}) \partial_r \hat{f}_a^{(1)} - P_\perp [\text{div } \mathbf{u}_\perp - (\mathbf{b} \nabla)(\mathbf{u} \mathbf{b}) + \\ + v_\parallel \text{div } \mathbf{b}] \partial_{p_\perp} \hat{f}_a^{(1)} + m_a (1/2 v_\perp^2 \text{div } \mathbf{b} - \mathbf{b} d_t \mathbf{u}_E + e E_\parallel / m) \partial_{p_\parallel} \hat{f}_a^{(1)}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

при условии квазинейтральности плазмы имеем

$$\sum_a |e_a| \int \hat{f}_a^{(1)} d\mathbf{p} = 0, \quad (1.58)$$

где $\mathbf{u}_E = c [\mathbf{E} \mathbf{B}] / B^2$ — скорость электрического дрейфа; $\mathbf{b} = \mathbf{B} / B$. Уравнения (1.39), (1.42) остаются в силе.

Для процессов в бесстолкновительной плазме с частотами $\omega \ll \omega_a$, но при условии, что эта частота ω велика по сравнению с характерными частотами переноса вдоль силовых линий магнитного поля $\omega \gg v / l_B$ (l_B — масштаб рассматриваемого процесса вдоль силовой линии), применяют теорию двух адиабатических инвариантов [91, 103]. Уравнения теории двух адиабатических инвариантов получаются посредством замыкания системы уравнений (1.39), (1.40), (1.54)–(1.58) соотношениями

$$d_t (P_\perp / \rho B) = 0, \quad (1.59)$$

$$d_t (P_\parallel B^2 / \rho^3) = 0, \quad (1.60)$$

которые следуют из сохранения продольного и поперечного адиабатических инвариантов дрейфовой теории [91, 103]. Необходимо отметить, что использование теории двух адиабатических инвариантов требует, как правило, тщательного обоснования условий применимости. В частности, должен быть мал поток тепла вдоль силовых линий магнитного поля (см. подробнее в [91]).

Методы описания космических лучей. Наконец, остановимся на описании космических лучей (КЛ) сильнонеравновесной, разреженной, надтепловой и часто релятивистской компоненты плазмы [11, 62, 161]. Определяющее влияние на движение быстрых заряженных частиц в космической плазме оказывают магнитные и электрические поля. Энергия частиц КЛ значительно превышает энергию тепловых частиц, кулоновские столкновения частиц с тепловой плазмой несущественны. Постановка задачи о взаимодействии КЛ с магнитными полями существенно зависит от соот-

ношения плотностей энергии КЛ и тепловой плазмы. Если плотность энергии КЛ мала, то обратным влиянием КЛ на плазму в первом приближении можно пренебречь и рассматривать задачу о распространении быстрых частиц в заданных регулярных и случайных полях. Эволюция КЛ описывается одночастичной функцией распределения $f^{(1)}(\mathbf{r}, p, t)$, удовлетворяющей уравнению (1.53), где напряженности \mathbf{E} и \mathbf{B} , входящие в электромагнитную силу $\dot{p} = \mathbf{F}$, можно считать заданными. Электрическое поле \mathbf{E} определяется из условия вмороженности (см. ниже соотношение (1.66)).

В некоторых случаях (например, при ускорении частиц ударными волнами) плотность энергии КЛ может приближаться к плотностям энергий гидродинамического движения и тепловой плазмы (такие случаи отмечались в межпланетном пространстве, см., например, [159]). В такой ситуации необходим учет обратного влияния КЛ на тепловую плазму. Чаще всего оно учитывается в гидродинамическом приближении [143, 144]. Плотность силы, приложенной к тепловой плазме с вмороженным магнитным полем,

$$\mathbf{F} = -\nabla p_{\text{кл}} \quad (1.61)$$

выражается через градиент давления КЛ $p_{\text{кл}}$. Последнее определяется изотропной частью N_0 функции распределения КЛ, зависящей лишь от модуля импульса p

$$p_{\text{кл}} = \frac{1}{3} \int p v N_0 dp. \quad (1.62)$$

На этом мы закончим обзор основных способов описания космической плазмы, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

1.2. Специфика космических полей

Основные и производные физические величины. Как мы видели в разд. 1.1, в уравнения МГД не входят электрические поля. Иначе говоря, здесь фигурируют поля \mathbf{B} и \mathbf{u} , они являются основными, а поле \mathbf{E} — производным, и величину его можно восстановить с помощью (1.4), (1.5). Конечно, это обстоятельство является просто следствием того, что поле \mathbf{E} было специально исключено. Важной здесь является сама возможность формального получения замкнутой системы уравнений без поля \mathbf{E} . Напомним, что в технической электродинамике ситуация обратная: основным является электрическое поле. Возможность исключения электрического поля как в столкновительной, так и в бесстолкновительной космической плазме дает большие преимущества и избавляет от ошибок. Рассуждения и исследования динамики полей с помощью электрического поля в принципе возможны и непротиворечивы. При этом, однако, требуется большая осторожность. Электрическое поле, в частности, зависит от системы отсчета и

в движущейся системе меняется (зависимостью магнитного поля от системы отсчета в космической электродинамике, как правило, можно пренебречь).

Недостатки МГД проявляются, когда необходимо рассмотреть поведение отдельных частиц и, главное, их ускорение. Другим слабым местом МГД является ее неуниверсальность, т. е. необходимость учета кинетики в ряде случаев. Но все же глобальные процессы хорошо описываются МГД и ее достоинства превышают недостатки.

Вмороженность магнитного поля в плазму. При заданном поле скоростей \mathbf{u} первый член правой части (1.45) описывает магнитное поле, движущееся вместе с веществом. Подробнее об этом будет сказано в разд. 1.5. В настоящий момент достаточно представить себе силовые линии поля, вмороженные в движущуюся плазму. Второй член правой части (1.45) ответствен за диссипацию поля, в результате чего число силовых линий не сохраняется. Отношение первого члена ко второму по порядку величины определяется магнитными числами Рейнольдса

$$Re_m = ul/\eta, \quad \tilde{Re}_m = uL/\eta, \quad (1.63)$$

где L — масштаб магнитного поля. Обычно числа Re_m , \tilde{Re}_m очень велики: Re_m , $\tilde{Re}_m = 10^6 \div 10^8$ (Солнце), Re_m , $\tilde{Re}_m = 10^{14}$ (межзвездная среда). Все дело в огромных масштабах l , L космических объектов. Поэтому вторым членом правой части (1.45) можно пренебречь и пользоваться уравнением

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot} [\mathbf{uB}]. \quad (1.64)$$

Перепишем теперь закон Ома (1.47), воспользовавшись (1.7):

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] = \frac{c}{4\pi\sigma} \text{rot} \mathbf{B}. \quad (1.65)$$

Правая часть в \tilde{Re}_m' раз меньше, чем $[\mathbf{uB}]/c$, поэтому в первом приближении

$$\mathbf{E} + [\mathbf{uB}]/c = 0. \quad (1.66)$$

Беря rot от (1.66) и воспользовавшись (1.5), возвращаемся к (1.64). Иначе говоря, (1.66) эквивалентно условию вмороженности (1.64). Уравнение (1.66) следует из (1.65) при $\sigma \rightarrow \infty$ или, что эквивалентно, при устремлении частоты столкновений к нулю: $\nu_{ei} \rightarrow 0$. В бесстолкновительной плазме (1.66) соответствует электрическому дрейфу плазмы со скоростью \mathbf{u} . Отсюда следуют два вывода.

1. Основная часть вектора \mathbf{E} направлена перпендикулярно полю \mathbf{B} (см. (1.66)) и мала по сравнению с \mathbf{B} :

$$|E| \approx u |B| / c. \quad (1.67)$$

2. В тех местах, где $\mathbf{u} = 0$ или $\mathbf{B} = 0$, напряженность электрического поля еще в \tilde{Re}_m раз меньше оценки (1.67):

$$|E| \approx \eta |B| / cL. \quad (1.68)$$

Эти выводы можно сформулировать несколько иначе. Даже слабое электрическое поле, соответствующее оценке (1.67), вызвало бы огромные токи, будь это поле возбуждено в земных условиях. В космической электродинамике основное электрическое поле как бы «экранируется» тем, что оно вызывает лишь электрический дрейф электронов и ионов с одинаковой скоростью u . То есть электрическое поле в первом приближении вовсе не вызывает ток! Электрическое поле, вызывающее ток, согласно оценке (1.68) крайне мало.

Потенциальная часть электрического поля. Хорошо известно, что космическая плазма квазинейтральна, т. е. объемный заряд $(n_e - n_i)e = \Delta\rho_e$ чрезвычайно мал, или $|n_e - n_i| \ll n_e, n_i$. Разделение зарядов происходит разве что внутри сферы дебаевского радиуса, который чрезвычайно мал по сравнению с l . Отсюда следует, что потенциальная часть поля E мала. Формально в этом можно убедиться, взяв дивергенцию от (1.7) с сохранением тока смещения (и с учетом (1.4), (1.47)):

$$\partial_t \Delta\rho_e + 4\pi\sigma \Delta\rho_e = -(\sigma/c) \operatorname{div} [\mathbf{uB}]. \quad (1.69)$$

Здесь для упрощения принято $\sigma = \text{const}$. Отсюда видно, что за очень короткое время $(\sim (4\pi\sigma)^{-1} \approx 10^{-14} \text{ с})$ установится стационарное состояние: $\partial_t = 0$, $\Delta\rho_e = -\frac{1}{4\pi c} \operatorname{div} [\mathbf{uB}]$. Тогда $|n_e - n_i|/n = (u/\omega_i l) (c_A/c)^2$ (c_A — альвеновская скорость, $c_A = B/\sqrt{4\pi n m_i}$). Поскольку u/ω_i редко оказывается больше ларморовского радиуса, первый множитель $\ll r_i/l$ очень мал, второй тоже: $c_A \ll c$. Следовательно, разделение зарядов ничтожно. Соответственно потенциальная часть E определяется из этого стационарного состояния:

$$\operatorname{div} E = -c^{-1} \operatorname{div} [\mathbf{uB}], \quad (1.70)$$

причем оценка потенциальной составляющей совпадает с (1.67). Формула (1.70), естественно, может быть получена, если взять дивергенцию от (1.66). Это означает, что потенциальная часть (1.70) включена в полное электрическое поле.

Бесстолкновительная плазма. Как уже отмечалось выше, условия вмороженности (1.64) и соответственно (1.66) имеют место в бесстолкновительной среде. Оценка (1.67) по-прежнему справедлива, справедлива также оценка потенциальной составляющей (1.70). В слабостолкновительной среде отклонение от фундаментального соотношения (1.66) дает правая часть (1.65) (которая мала). В полностью ионизованной плазме редких столкновений проводимость становится анизотропной: поперек магнитного поля она мала, а вдоль — велика. Проще всего записать для этого случая обобщение (1.65):

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi p e} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (1.71)$$

Второй член правой части недиссипативной природы. Это видно из того, что в него не входит частота столкновений. Кроме того, он может быть перенесен в левую часть с помощью соотношения

$$\frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} = n(\mathbf{u}_{d_i} - \mathbf{u}_{d_e})e = ne\mathbf{u}_d, \quad (1.72)$$

где индекс «d» указывает на дрейфовую природу токовых скоростей ионов (дополнительный индекс «i») и электронов (индекс «e»). Подставляя выражение для $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ (1.72) во второй член правой части (1.71) и учитывая, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_{d_i}$ (массовая скорость определяется ионами), имеем

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_{d_e} \mathbf{B}] = \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (1.73)$$

Теперь, как говорится, магнитное поле заморожено в электрон, т. е. силовые линии движутся со скоростью \mathbf{u}_{d_e} , почти полностью совпадающей с массовой скоростью \mathbf{u} . Дело в том, что электроны «привязаны» к ионам даже при отсутствии столкновений [52]. При $\sigma \rightarrow \infty$, т. е. $\nu_{ei} \rightarrow 0$, правая часть (1.73) исчезает, возвращая нас к условиям замороженности (1.66) или (1.64) с несущественной заменой \mathbf{u} на \mathbf{u}_{d_e} .

Еще один слабый эффект может быть учтен в соотношении (1.66), а именно градиент электронного (вообще говоря, тензорного) давления $\hat{p}_e = \hat{p}$:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{B}] = \frac{1}{ne} \nabla \hat{p}. \quad (1.74)$$

Градиент давления обычно уравнивается электромагнитной силой. Согласно (1.49) при полном равновесии (правая часть (1.49) обращается в нуль) формула (1.74) опять принимает форму (1.71). Отклонение от идентичности (1.74) и (1.71) появляется из-за кориолисовой силы во вращающейся среде (и приводит к внешней ЭДС) или из-за силы тяжести (в результате чего возникает амбиполярная диффузия). И тот и другой эффекты весьма слабы.

Продольные токи и электрические поля. Обратим внимание на то, что согласно (1.66) $\mathbf{E} \mathbf{B} = 0$, в то время как из (1.74) следует, что $\mathbf{E} \mathbf{B} \neq 0$. Таким образом, даже в равновесной бесстолкновительной плазме может появиться составляющая поля \mathbf{E} , параллельная магнитному. Дело в том, что дрейфовые токи \mathbf{j}_d направлены перпендикулярно полю \mathbf{B} , но, вообще говоря, $\operatorname{div} \mathbf{j}_d \neq 0$. В то же время (1.69) можно записать в виде $\partial_t \Delta \rho_e + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и в быстро устанавливаемом стационарном состоянии

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1.75)$$

Иначе говоря, дрейфовые (поперечные) токи привели бы к скоплению объемного заряда, если бы не возникающие потенциальные электрические поля или эквивалентные им градиенты электронного давления (1.74), заставляющие электроны двигаться вдоль силовых линий и замыкать токи согласно (1.75). Отсюда

сразу следует, что такие токи, параллельные магнитному полю, по интенсивности не превышают дрейфовые, а последние — довольно слабые (см. разд. 1.6). Этот факт уже сам по себе характеризует не только продольные токи, но и продольное электрическое поле. Последнее можно оценить, зная токовую скорость u_d , а также эффективную частоту столкновений

$$v_{\text{eff}} = u_{T_e}/L \quad (1.76)$$

(u_{T_e} — тепловая скорость электронов), возникающую вследствие ограниченности размера L , на котором происходило ускорение тепловой частицы вдоль силовой линии в результате действия продольного поля E_{\parallel} (см., например, [41]):

$$\begin{aligned} E_{\parallel} &= j/\sigma_{\text{eff}} = neu_d/\sigma_{\text{eff}} = m_e u_{T_e} u_d / Le = \\ &= (\eta_{\text{eff}}/cL) B = (u_{T_e}/c)(l_p/L)^2 B = (d/L)(l_p/L) B. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Токовая скорость u_d оценена с помощью (1.72); $d = u_{T_e}/\omega_p$ — дебаевский радиус. Обе безразмерные дроби в (1.77) очень малы по сравнению с единицей, следовательно, $E_{\parallel} \ll B$. Продольное поле чрезвычайно мало.

Следует подчеркнуть, что частота столкновений (1.76) все же очень низкая (в магнитосфере Земли $v_{\text{eff}} \approx 10^{-1} \text{ с}^{-1}$, в солнечном ветре $v_{\text{eff}} < 10^{-2} \text{ с}^{-1}$). Поэтому σ_{eff} оказывается по-прежнему высокой, а величина $\eta_{\text{eff}} = c^2/4\pi\sigma_{\text{eff}}$ — низкой. В магнитосфере, например $\eta_{\text{eff}} = 10^{10} \text{ см}^2/\text{с}$, что на три порядка больше $\eta = 10^7 \text{ см}^2/\text{с}$, типичной для солнечных параметров. Тем не менее основные безразмерные параметры Re_m , $\tilde{\text{Re}}_m$ по-прежнему очень велики. Именно поэтому соотношения вмороженности (1.66) и (1.64) остаются неизменными.

Характерные времена и частоты. Мы убедились в том, что наиболее быстрое изменение поля согласно (1.45) обусловлено вмороженностью, т. е., грубо говоря, переносом магнитных неоднородностей со скоростью u . Характерное время и частота этого процесса

$$\begin{aligned} t_0 &= l/u, & \omega_0 &= u/l, \\ \tilde{t}_0 &= L/u, & \tilde{\omega}_0 &= u/L. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Это время для Солнца и звезд не слишком велико: не более суток, обычно минуты или часы. Конечно, время поворота межзвездных облаков больше на много порядков (10^{14} с), но все же оно мало по сравнению с временем поворота Галактики, временем генерации поля и т. п. Вообще, t_0 , \tilde{t}_0 представляют наиболее быстрые процессы, а ω_0 , $\tilde{\omega}_0$ — наибольшие частоты.

Время диссипации поля, или «проскальзывания» его относительно вещества, в $\tilde{\text{Re}}_m$ раз больше, чем \tilde{t}_0 :

$$t_1 = L^2/\eta. \quad (1.79)$$

Для Солнца оно составляет сотни — тысячи лет, а для Галактики превышает возраст Вселенной!

Таким образом, космические магнитные поля чрезвычайно консервативны. Они только движутся с веществом и должны были бы исчезать за огромные промежутки времени. С другой стороны, за эти же времена они должны были бы генерироваться. То есть из этой картины неясно, каким же образом возникли космические поля и чем объяснить их быструю переменность. На самом же деле, конечно, описанный подход хотя и представляет типичные условия и наиболее распространенные явления, но еще не включает особые явления активности: токовые слои и ударные волны. Именно благодаря последним оказываются возможными активность и «неуспокоенность» полей.

1.3. Наиболее распространенные магнитные конфигурации

В этом разделе рассмотрим простейшие конфигурации, типичные для «спокойных» условий в космической плазме. В сущности, поля такого типа характерны не только для условий без активности. Просто если имеется активность, то чаще всего она проявляется в том, что на фоне рассматриваемых ниже полей распространяются ударные волны. А в некоторых областях, малых по сравнению с общим объемом, развиваются особые процессы — токовые слои.[§]

Потенциальные (бестоковые) поля. Магнитное поле неподвижной плазмы ($\mathbf{u} = 0$) согласно (1.45) диссипирует. Действительно, умножим (1.45) на \mathbf{B} скалярно и проинтегрируем по рассматриваемому объему:

$$\frac{1}{2} d_t \int B^2 dx = - \int \eta (\text{rot } \mathbf{B})^2 dx - \int \eta [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] dS. \quad (1.80)$$

Первый член справа описывает диссипацию за время t_1 (1.79), второй — поток энергии через границу области. Если область — все пространство, то, конечно, второй интеграл исчезает и поле полностью диссипирует. Действительно, согласно (1.80) B^2 уменьшается до тех пор, пока $\text{rot } \mathbf{B}$ не обратится в нуль. А единственное решение системы:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.81)$$

при $\mathbf{B} \rightarrow 0$ на бесконечности суть $\mathbf{B} \equiv 0$. Если же рассматриваемая область — часть пространства и поток через границу S отсутствует, то второй интеграл (1.80) опять исчезает, а решением (1.81) является потенциальное поле

$$\mathbf{B} = \nabla \psi, \quad \Delta \psi = 0 \quad (1.82)$$

с заданной нормальной составляющей поля B_n на границе S .

Наиболее распространенный пример — поля в хромосфере и короне Солнца, рассчитанные при заданном B_n на фотосфере. Данный расчет представляет собой задачу Неймана и однозначно определяет поля. Поле (1.82) обладает минимальной энергией

в классе всех полей с одинаковым B_n на S . Поэтому в принципе любое начальное поле должно деградировать к этому состоянию (с фиксированным B_n на S) с выделением избыточной энергии. А из этого состояния уже невозможно выделить энергию. Собственно говоря, чаще всего именно так и представляют процесс вспышки, когда избыточная энергия выделяется, а остается потенциальное поле. Только, конечно, процесс этот должен происходить за времена значительно меньшие, чем обычные диссипативные (1.79).

Магнитостатическое равновесие. Поля всплывают на поверхность Солнца и выходят в корону. Изначально они не являются потенциальными. Деградация к этому минимальному состоянию чрезвычайно длительна, если нет токовых слоев. Если, кроме того, нет возмущающих начальное состояние движений, то конфигурация должна прийти к равновесию (правые части (1.44), (1.49) обращаются в нуль):

$$-\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] + \rho \mathbf{g} = 0. \quad (1.83)$$

Диссипацией здесь можно пренебречь (т. е. $\nu = 0$, $\eta = 0$). Учет диссипации привел бы к очень медленной деградации конфигурации (за огромное время (1.79)).

В очень многих задачах силой тяжести пренебрегают, тогда условие равновесия принимает вид

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]. \quad (1.84)$$

Умножая (1.84) на \mathbf{B} и на $\text{rot } \mathbf{B}$ скалярно, получим

$$\mathbf{B}\nabla p = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B}\nabla p = 0. \quad (1.85)$$

Следовательно, изобарические поверхности ($p = \text{const}$) совпадают с магнитными и токовыми. Или, иначе, давление p постоянно как вдоль силовой линии, так и вдоль линии поля $\text{rot } \mathbf{B}$. Простейшим примером равновесия является конфигурация в виде прямых силовых линий, параллельных, скажем, оси z : $\mathbf{B} = \{0, 0, B_z(x, y)\}$. Тогда (1.84) интегрируется:

$$p + B^2/8\pi = \text{const}. \quad (1.86)$$

В частном одномерном случае $B_z = B_z(y)$ (зависимость от одной координаты). Предположим, кроме того, что $B_z(y)$ — нечетная функция аргумента y , т. е. при $y = 0$ B_z тоже обращается в нуль. Мы приходим к простейшей равновесной конфигурации в виде прямых силовых линий с нейтральным слоем при $y = 0$ (рис. 1.1). Более общую, но все еще одномерную конфигурацию получим при учете x -составляющей: $\mathbf{B} = \{B_x(y), 0, B_z(y)\}$. В равновесном состоянии это поле тоже удовлетворяет уравнению (1.86). Если по-прежнему $B_z(y)$ — нечетная функция y , то можно сказать, что на рис. 1.1 изображена эта более общая конфигурация, причем B_x -составляющая, перпендикулярная плоскости рисунка никак не отражена. Важно только иметь в виду, что нейтральный

слой здесь, вообще говоря, отсутствует: модуль вектора поля не обращается в нуль при $y = 0$. В этом случае, как говорят, у поля имеется шир.

Одномерные конфигурации, однако, физически малосодержательны. Уже в двумерном случае появляются важнейшие характерные черты активных полей. Но об этом ниже. Пока нас интересуют равновесные конфигурации. Прежде всего рассмотрим зависимость от y, z ($\partial_x = 0$). Будем называть поле $\mathbf{V}_{\parallel} = \{B_x(y, z), 0, 0\}$ продольным, а $\mathbf{V}_{\perp} = \{0, B_y(y, z), B_z(y, z)\}$ поперечным. Полное поле, очевидно, есть сумма: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\parallel} + \mathbf{V}_{\perp}$. Тогда условие $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ записывается в виде $\operatorname{div} \mathbf{V}_{\perp} = 0$ и удобно ввести потенциал A (x -компоненту вектор-потенциала магнитного поля \mathbf{A} , $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{V}$, $A \equiv A_x$):

$$B_y = \partial_z A, \quad B_z = -\partial_y A. \quad (1.87)$$

При этом условии равновесия (1.87) записывается в виде

$$\Delta A = f(A), \quad f(A) = -4\pi d_A P(A), \quad (1.88)$$

$$P = p + B_x^2/8\pi, \quad p = p(A), \quad B_x = B_x(A).$$

Уравнением (1.88) будем часто пользоваться ниже. Оно только на первый взгляд кажется простым. В действительности его нелинейный характер не дает возможности решить или исследовать его в общем виде. Тем не менее известно немало полезных решений. В частности, упомянутое выше одномерное решение (зависимость только от y), естественно, является частным решением уравнения (1.88).

Еще одно хорошо известное решение — осесимметричное. Введем полярную систему координат (s, φ) в плоскости yz . Тогда (1.88) запишется в виде

$$\frac{1}{2} d_s B_{\varphi}^2 + B_{\varphi}^2/s + 4\pi d_s P = 0, \quad B_{\varphi} = -d_s A. \quad (1.89)$$

При известном P определяется B_{φ} , и наоборот. Эта конфигурация все же одномерная — зависимость только от одной координаты s . Известны также существенно двумерные конфигурации в плоской геометрии, т. е. удовлетворяющие (1.88). Речь о них пойдет ниже, в разд. 5.10.

Все рассмотренные выше типы равновесий не ограничены в пространстве, по крайней мере в направлении оси x . Известны ограниченные «уединенные» решения, обладающие осевой симметрией.

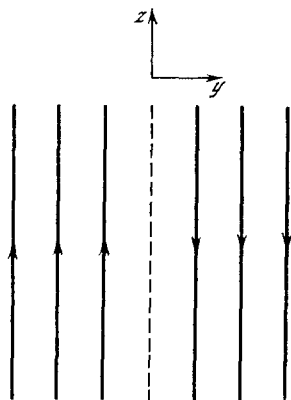


Рис. 1.1. Простейшая равновесная магнитная конфигурация с нейтральным слоем (штриховая линия)

Бессилловые поля. Для космической плазмы характерно очень сильное изменение плотности. В частности, при подъеме магнитной трубки, упомянутой в начале предыдущего пункта, плотность меняется на несколько порядков. А при подъеме в корону — еще на семь-восемь порядков! В конце концов поле попадает в корону, где плазма настолько разрежена, что давление становится несущественным. Более конкретно, величина

$$\beta = 8\pi r/B^2 = (u_{Ti}/c_A)^2 = (r_i/\mathcal{L}_p)^2, \quad (1.90)$$

$$\mathcal{L}_p = c/\Omega_p, \quad \Omega_p = (4\pi n_e^2/m_i)^{1/2},$$

становится много меньше единицы. При этом ни градиент давления, ни сила тяжести ρg не способны уравновесить электромагнитную силу в (1.83) (сила тяжести — все из-за той же малости плотности ρ). Магнитное поле должно уравновешиваться «само по себе». Это возможно, если $[\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] = 0$ или

$$\text{rot } \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}, \quad (1.91)$$

где α — функция координат (псевдоскаляр). Беря дивергенцию от (1.91) и учитывая (1.6), имеем

$$\nabla \alpha \mathbf{B} = 0, \quad (1.92)$$

т. е. поверхность $\alpha = \text{const}$ совпадает с магнитной поверхностью. Или, что то же, величина α постоянна вдоль силовой линии. Реальные бессилловые поля (1.91), во-первых, не занимают всего пространства, во-вторых, α не является константой (подробнее см. разд. 5.6).

1.4. Магнитные поля в движущейся плазме

Магнитные структуры. В разд. 1.3 уже упоминались уединенные решения равновесия. В более общем случае известны уединенные стационарные решения. Это означает, что $\mathbf{u} \neq 0$, но $\partial_t = 0$. Диссипацией снова можно пренебречь (см. разъяснение в разд. 1.2, 1.3). В стационарном случае $\mathbf{E} = \nabla\Phi$, тогда $\partial_t \mathbf{B} = 0$ (см. (1.66) и (1.64)). Стационарное решение согласно (1.49) должно удовлетворять уравнению

$$[\text{rot } \mathbf{u}, \mathbf{u}] + \frac{1}{2} \nabla u^2 = (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p / \rho + [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] / 4\pi \rho. \quad (1.93)$$

Интересно, что произвольное поле \mathbf{B} может удовлетворить (1.93), если $\rho = \text{const}$ и

$$\mathbf{u} = \pm \mathbf{B} / \sqrt{4\pi \rho}, \quad (1.94)$$

$$p + \rho u^2 / 2 = \text{const}. \quad (1.95)$$

Надо сказать, что выражение (1.94) не удовлетворяет правилам векторных размерностей: слева — вектор, справа — псевдовектор. Оно всего лишь означает, что скорость параллельна или антипараллельна полю \mathbf{B} и по модулю совпадает с альвеновской. Тем

не менее один только этот факт указывает на трудность реализации состояния (1.94), (1.95) в природе.

Более реальные расчеты магнитных структур уединенного типа проводились для осесимметричных случаев [71]. Есть основания полагать, что такие структуры присутствуют в МГД-турбулентности космической плазмы [136].

Динамика полей. Равновесие, описанное в разд. 1.3, устанавливается не всегда. Это связано прежде всего с движением плазмы, приводящим к изменению полей во времени. Наиболее простым и очень распространенным процессом такого типа является перенос. Можно привести очень много примеров: упомянутый выше вынос полей на поверхность Солнца, перенос поля в солнечном ветре (так называемые вмороженные структуры) и т. п. Еще пример — вращение звезды. Некоторые случаи переменности полей на звездах можно объяснить тем, что наблюдатель видит разные полушария звезды с разными полями.

Весьма важным классом динамики полей является вытягивание силовых линий сдвиговым движением. Поле при этом не зависит от направления, параллельного скорости \mathbf{u} . Так, если $\mathbf{u} = \{u_x(y, z), 0, 0\}$, то вытягивание происходит при $\partial_x \mathbf{B} = 0$. Динамика поля описывается (1.64) или в координатах

$$\partial_t B_x = B_y \partial_y u_x + B_z \partial_z u_x, \quad \partial_t B_y = 0, \quad \partial_t B_z = 0. \quad (1.96)$$

Отсюда следует, что B_y -, B_z -компоненты не зависят от времени, а $B_x = B_x^{(0)} + (B_y \partial_y u_x + B_z \partial_z u_x)t$ (линейный рост со временем). К этому же классу относится вытягивание тороидального поля дифференциальным вращением. В сферической системе координат (r, θ, φ) $\mathbf{u} = \{0, 0, u_\varphi\}$ ($u_\varphi = r\Omega(r, \theta)$, Ω — угловая скорость). Зависимость от широты θ и глубины r как раз и означает, что вращение дифференциальное. Вытягивание поля происходит, если $\partial_t \mathbf{B} = 0$:

$$\partial_t B_r = 0, \quad \partial_t B_\theta = 0, \quad \partial_t B_\varphi = r \sin \theta B_r \partial_r \Omega + \sin \theta B_\theta \partial_\theta \Omega; \quad (1.97)$$

здесь B_r - и B_θ -составляющие (меридиональное поле) сохраняются, в то время как B_φ -составляющая (тороидальное поле) растет линейно со временем, как B_x -составляющая в (1.96). Твердотельное вращение ($\partial_r \Omega = \partial_\theta \Omega = 0$) не влияет на поле.

В общем случае, когда поле зависит от направления, параллельного скорости \mathbf{u} , наряду с вытягиванием происходит уменьшение масштаба поля. Это явление особенно типично для турбулентных движений. Речь об этом пойдет в разд. 3.1.

Инварианты. Для несжимаемой жидкости идеальной МГД известно несколько инвариантов — сохраняющихся величин, играющих значительную роль в динамике полей.

Пусть S — поверхность, ограничивающая некоторый объем и движущаяся вместе с жидкостью. Вмороженность поля в вещество означает, в частности, что магнитная поверхность может быть именно такой поверхностью S . Пользуясь (1.49) с $\tilde{\mathbf{v}} = 0$

и (1.64), получим

$$\int_{\Delta} \mathbf{u} \mathbf{B} d\mathbf{x} = K_{\Delta} = \text{const} \quad (1.98)$$

— интеграл по объему Δ , ограниченному магнитной поверхностью S (здесь учтено, что $\mathbf{B}_n = 0$ на S). Воспользуемся теперь (1.64) и уравнением для вектор-потенциала \mathbf{A} ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$), получаемого из (1.64):

$$\partial_t \mathbf{A} = [\mathbf{u} \mathbf{B}] + \nabla \psi. \quad (1.99)$$

Тогда получим

$$\int_{\Delta} \mathbf{A} \mathbf{B} d\mathbf{x} = M_{\Delta} = \text{const}. \quad (1.100)$$

Наконец, сохраняется полная энергия системы

$$W = W_K + W_M + W_P = \int w d\mathbf{x} = \text{const}, \quad (1.101)$$

$$w = w_K + w_M + w_P = \rho u^2/2 + B^2/8\pi + p(\gamma - 1)$$

(здесь, конечно, опять диссипация отсутствует), интеграл берется по объему, к которому не поступает энергия. Точнее, на поверхности S , ограничивающей объем, вектор Пойнтинга

$$- (c/4\pi) [\mathbf{E} \mathbf{B}] = (1/4\pi) [[\mathbf{u} \mathbf{B}] \mathbf{B}] \quad (1.102)$$

должен обращаться в нуль. Кроме того, предполагается теплоизоляция объема, т. е. тепловая энергия тоже не поступает через S . Разумеется, сохраняющимися величинами являются также полный импульс и момент импульса. Они, однако, нам не потребуются. Инвариант M_{Δ} (1.100) называют магнитной гиротропностью. Он имеет большое значение в МГД-турбулентности и, кроме того, аналогичен инварианту $\int \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{u} d\mathbf{x}$ в гидродинамике (см. [318]) (последний уже не сохраняется в МГД).

Что касается инварианта (1.98), то его называют кросс-гиротропностью. Он не играет существенной роли и, по всей вероятности, чаще всего просто равен нулю. Формально максимальное значение (равное $W_K (16\pi/\rho)^{1/2}$) он примет при выполнении (1.94). Оно соответствует равномерному распределению магнитной и кинетической энергий. Уже на основании этого можно указать на два важных случая, когда инвариант K_{Δ} обращается в нуль или очень мал по сравнению с $W_K (16\pi/\rho)^{1/2}$. Первый случай — возникновение движения в результате неравновесия магнитного поля. Тогда в начальный момент $\mathbf{u} = 0$ и, следовательно, $K_{\Delta} = 0$. Возникшее движение и меняющееся поле таковы, что K_{Δ} остается равным нулю. Второй случай — генерация магнитного поля (усиление слабого затравочного поля). Поскольку в начальный момент энергия поля \mathbf{B} далека до уровня равномерного распределения, инвариант K_{Δ} , во всяком случае, много меньше, чем $W_K (16\pi/\rho)^{1/2}$.

1.5. Плазма как сплошная среда. Лагранжево описание

Пассивные поля. Выше неоднократно отмечалась применимость МГД как основного способа описания космической плазмы. При этом плазма рассматривается как сплошная среда или жидкость (вообще говоря, сжимаемая). Вместо реальных частиц вводятся «жидкие». Если в жидкость ввести легкую частицу, не влияющую на движение, размер которой много меньше наименьших характерных размеров скорости, то данная пробная частица будет переноситься движениями среды. Ее называют жидкой частицей. Лагранжевой траекторией называют $x(a, t)$ — положение жидкой частицы в точке x в момент времени t при условии, что в начальный момент $t = 0$ она была в точке a . Траектория $x(a, t)$ представляет собой семейство решений (по параметру a) уравнения

$$\partial_t x = u(x, t), \quad x(a, 0) = a, \quad (1.103)$$

где u — скорость, которую теперь удобно называть эйлеровой. Скорость жидкой частицы $v(a, t) = u[x(a, t), t]$ называют лагранжевой скоростью. Кроме траектории $x(a, t)$, в дальнейшем будет использоваться $a(x, t)$ — обратная функция по отношению к $x(a, t)$: $a(x, 0) = x$. Множество таких пробных частиц с плотностью Θ называют скалярной примесью. Величина Θ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \Theta + \operatorname{div} \Theta u = 0 \quad (1.104)$$

(ср. с (1.39).) Назовем Θ , удовлетворяющую уравнению

$$\partial_t \tilde{\Theta} + u \nabla \tilde{\Theta} = d_t \tilde{\Theta} = 0, \quad (1.105)$$

энтропийной примесью (поскольку $\tilde{\Theta}$ ведет себя как энтропия при адиабатическом процессе). В несжимаемой жидкости $\operatorname{div} u = 0$ и (1.104) и (1.105) совпадают, т. е. скалярная примесь в этом случае идентична энтропийной. Скалярные поля Θ и $\tilde{\Theta}$ называют пассивными, поскольку они не влияют на движение. Магнитное поле представляет собой пассивное поле, если энергия его мала.

Точные решения и вспомогательные формулы. Прежде всего, $a(x, t)$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (1.105):

$$\partial_t a_i + u_j \partial_j a_i = d_t a_i = 0, \quad d_t f_i(a, t) = \partial_t f_i, \quad (1.106)$$

где f_i — произвольная векторная функция. С использованием (1.106) нетрудно убедиться в том, что решением (1.105) может служить

$$\tilde{\Theta}(x, t) = \tilde{\Theta}(a(x, t), 0) = \tilde{\Theta}^{(0)}, \quad (1.107)$$

$$\partial_i \tilde{\Theta}(x, t) = \tilde{\partial}_j \tilde{\Theta}(a, 0) \partial_j a_i; \quad (1.108)$$

здесь $\tilde{\partial}_j = \partial / \partial a_j$ — лагранжева производная, причем (1.108) есть просто производная ∂_i от (1.107)! Начальное распределение $\tilde{\Theta}^{(0)}$ —

произвольная функция. В частности,

$$\tilde{\Theta}(\mathbf{x}, t) = \delta[\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)], \quad \tilde{\Theta}(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{x}), \quad (1.109)$$

здесь \mathbf{a} (без аргументов) — параметр, соответствующий начальному положению частицы. Это видно из второго выражения (1.109) для «плотности» примеси в виде одной частицы, находящейся в точке \mathbf{a} .

Плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ выражается через начальную $\rho(\mathbf{a}, 0)$ следующим образом:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = J\rho[\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), 0], \quad (1.110)$$

$$J = \partial(a_1, a_2, a_3)/\partial(x_1, x_2, x_3) = 1/6 \varepsilon_{ijf} \varepsilon_{lmn} (\partial_l a_i)(\partial_m a_j)(\partial_n a_f),$$

$$d\mathbf{a} = J d\mathbf{x}, \quad d_t J = -J \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad d_t d\mathbf{x} = \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x}.$$

С помощью якобиана J можно записать решение уравнения (1.104):

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = J\Theta[\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), 0] = J\Theta^{(0)}, \quad (1.111)$$

где $\Theta^{(0)}$ — произвольная функция. В частности, полагая, что $\Theta^{(0)}$ — δ -функция, как (1.109), и пользуясь известным свойством δ -функций, имеем

$$\Theta[\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) | t] = J\delta[\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)] = \delta[\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)], \quad (1.112)$$

здесь в отличие от (1.109) \mathbf{x} — параметр и Θ — функция от \mathbf{a} . Для несжимаемой жидкости $J = 1$ и (1.107) и (1.111) идентичны.

Для дальнейшего окажутся полезными следующие вспомогательные формулы:

$$\partial_j a_i = 1/2 J \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} (\partial_m x_l)(\tilde{\partial}_n x_f), \quad (1.113)$$

$$d_t \partial_j a_i = -(\partial_j u_f)(\partial_f a_i);$$

$$\tilde{\partial}_j x_i = 1/2 J^{-1} \varepsilon_{jlf} \varepsilon_{imn} (\partial_m a_l)(\partial_n a_f), \quad (1.114)$$

$$d_t \tilde{\partial}_j x_i = (\partial_f u_i)(\tilde{\partial}_j x_f).$$

Теперь можно выписать общее решение уравнения вмерзженности (1.64):

$$B_i(\mathbf{x}, t) = J B_j^{(0)} \tilde{\partial}_j x_i, \quad B_j^0 = B_j[\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), 0], \quad (1.115)$$

где $\mathbf{B}^{(0)}$ — начальное поле. Выражение (1.115) неудобно тем, что содержит J — довольно громоздкое выражение согласно (1.110). Его часто используют, если жидкость несжимаема и $J = 1$. В сжимаемой жидкости более удобным оказывается решение

$$A_i(\mathbf{x}, t) = A_j^{(0)} \partial_i a_j, \quad A_j^{(0)} = A_j[\mathbf{a}(\mathbf{x}, t), 0]. \quad (1.116)$$

Убедиться в справедливости (1.115), (1.116) можно следующим образом. Прежде всего, беря ротор от (1.116) и учитывая (1.114), получим (1.115), так что условие $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ следует из (1.115) автоматически. Для непосредственной проверки (1.115) следует выписать величину $d_t B_i$ и воспользоваться (1.110), (1.114) и (1.106).

Тогда получается (1.64), как и должно быть. С другой стороны, вычисляя $d_t A_i$ согласно (1.116) и учитывая (1.113) и (1.106), получим (1.99).

Законы сохранения. Скалярная примесь согласно (1.104) сохраняется внутри жидкого объема Δ (т. е. объема, ограниченного жидкой поверхностью). Аналогично ведет себя плотность (сохранение массы):

$$d_t \int_{\Delta} \Theta dx = 0, \quad \int_{\Delta} \Theta dx = \text{const}, \quad \int_{\Delta} \rho dx = \text{const}$$

(мы воспользовались (1.104) и (1.110)). Энтропийная примесь $\tilde{\Theta}$ сохраняется вдоль траектории — это следует из точного решения (1.107). В несжимаемой жидкости ($\text{div } \mathbf{u} = 0$) поведение Θ и $\tilde{\Theta}$ идентично и сохраняется величина

$$\int_{\Delta} \Theta^n dx = \text{const}. \quad (1.117)$$

Наконец, сохраняется поток магнитного поля через жидкую поверхность $\Phi = \int \mathbf{B} dS$ — это и есть строгая формулировка явления вмороженности. С помощью соотношения для элемента траектории жидких частиц ds

$$d_t ds = (ds \nabla) \mathbf{u} \quad (1.118)$$

получим

$$\begin{aligned} d_t \Phi &= d_t \int \mathbf{B} dS = d_t \oint A_i ds_i = \oint (d_t A_i + A_j \partial_j u_i) ds_i = \\ &= \oint (\partial_t A - [\mathbf{u} \mathbf{B}]) ds = 0. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Здесь контурный интеграл берется по (замкнутому) жидкому контуру, ограничивающему поверхность S . При получении последнего интеграла (1.119) учтено, что $\oint \partial_i u_j A_j ds_i = \oint \nabla \psi ds = 0$ ($\nabla \psi$ из (1.99)).

Симметрия и аналогия между уравнениями. 1. Комбинируя (1.64) и (1.39), получим

$$d_t \mathbf{B} / \rho = (\mathbf{B} / \rho, \nabla) \mathbf{u}. \quad (1.120)$$

Уравнение (1.120) совпадает с (1.118). Это явление тоже интерпретируют как вмороженность (наряду с соотношением (1.119)). Аналогию между процессами (1.120) и (1.118) можно записать в символической форме:

$$\mathbf{B} / \rho \leftrightarrow ds. \quad (1.121)$$

2. Возьмем ротор от (1.49) с $\mathbf{B} = 0$, $\tilde{\mathbf{v}} = \text{const}$, $p = p(\rho)$:

$$\partial_t \omega = \text{rot} [\mathbf{u} \omega] + \tilde{\mathbf{v}} \Delta \omega, \quad (1.122)$$

$\omega = \text{rot } \mathbf{u}$. Сходство этого уравнения с (1.45) при $\eta = \text{const}$ очевидно. Эту аналогию запишем в виде

$$\mathbf{B} \leftrightarrow \omega = \text{rot } \mathbf{u}. \quad (1.123)$$

Решение (1.123) для идеальной жидкости $\tilde{v} = 0$ совпадает с (1.115). Аналогию (1.123) впервые рассматривал Бэтчелор [187]. Соответственно (1.49) ($\mathbf{B} = 0$, $p = p(\rho)$, $\nabla p/\rho = \nabla w$) можно записать так:

$$\partial_t \mathbf{u} = [\mathbf{u}\boldsymbol{\omega}] - \nabla(w + u^2/2) + \tilde{v}\Delta \mathbf{u}, \quad (1.124)$$

т. е. аналогично (1.99). Данную аналогию запишем в виде (см. [34])

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{u}, \quad (1.125)$$

причем (1.123) можно рассматривать как следствие соотношения (1.125).

3. В двумерном случае плоской геометрии аналогия (1.123), (1.124) сохраняется. Пусть движение происходит в плоскости yz : $\mathbf{u} = \{0, u_y(y, z), u_z(y, z)\}$. Тогда

$$\partial_t B_x + \operatorname{div} B_x \mathbf{u} = 0. \quad (1.126)$$

Отсюда $\int_{\Delta} B_x dx = \text{const}$ и, если $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$,

$$\int_{\Delta} B_x^2 dx = \text{const}, \quad (1.127)$$

$$\int_{\Delta} \omega_x^2 dx = \text{const} \quad (1.128)$$

(ср. с (1.117)). Равенство (1.128) называют сохранением энстрофии. Рассмотренная аналогия (1.125) соответствует тому, что вектор-потенциал лежит в плоскости yz , $A_x = 0$. Более интересен случай плоского движения, причем $A_x \neq 0$ [80]. Тогда все три компоненты магнитного поля не обращаются в нуль. Составляющая B_x по-прежнему удовлетворяет (1.126), в то время как A_x удовлетворяет

$$d_t A_x = \partial_t A_x + \mathbf{u}\nabla A_x = 0. \quad (1.129)$$

Отсюда следует, что A_x ведет себя как энтропийная примесь (см. (1.105)). Отметим, что система (1.126), (1.129) является полной, поскольку из A_x могут быть получены составляющие поля \mathbf{B} : B_y и B_z (см. (1.87)).

4. Аналогия между силовой линией и траекторией жидкой частицы (1.121) породила 30 лет назад множество разработок, касающихся поведения жидких поверхностей, градиентов скалярной примеси, траекторий жидких частиц и т. п. По-видимому, наибольший физический смысл имеет аналогия

$$\mathbf{A} \leftrightarrow \nabla \tilde{\theta} \quad (1.130)$$

(см. [38]), следующая из сходства решений (1.116) и (1.108) (уравнения несколько различаются). Подробнее об этом см. разд. 4.11.

5. Стационарная гидродинамика ($\mathbf{B} = 0$) аналогична магнитостатическому равновесию или (1.93) ($\mathbf{B} = 0$) аналогично (1.84).

Символически запишем

$$\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{u}, \quad p \leftrightarrow w + u^2/2, \quad (1.131)$$

$\nabla w = \nabla p/\rho$ (см. [321]). Иначе говоря, всякому магнитостатическому равновесию соответствует стационарное течение, и наоборот.

6. Одна из наиболее известных аналогий получается, если ввести $\mathbf{u}_{\pm} = \mathbf{u} \pm \mathbf{B}/\sqrt{4\pi\rho}$, причем $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\rho = \text{const}$, $\tilde{v} = \eta = \text{const}$. Тогда, складывая и вычитая уравнения (1.49) и (1.45), получим

$$\partial_t \mathbf{u}_{\pm} + (\mathbf{u}_{\mp} \nabla) \mathbf{u}_{\pm} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \eta \Delta \mathbf{u}_{\pm}. \quad (1.132)$$

Здесь два уравнения, для \mathbf{u}_+ и для \mathbf{u}_- , очевидно симметричны. Кроме того, (1.132) похоже на уравнение движения (1.49) и соответственно на уравнение для \mathbf{A} (1.99). Несмотря на столь далеко идущие аналогии, уравнение (1.132) до сих пор ничего особенного не дало. Вероятно, потому, что опять (как в (1.94)) здесь складываются вектор и псевдовектор.

7. В самогравитирующей жидкости сила \mathbf{g} в (1.83) записывается $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ (Φ — гравитационный потенциал, $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$). Тогда из условия равновесия (1.83) при $\mathbf{B} = 0$ следует $[\nabla\rho, \nabla\Phi] = 0$, т. е. $\rho = \rho(\Phi)$. Поэтому можно записать

$$\Delta\Phi - 4\pi G\rho(\Phi) = 0 \quad (1.133)$$

с очевидным сходством с (1.88) (см. [344]). Следует только иметь в виду, что равновесие (1.88) двумерное, в то время как гравитационное равновесие (1.133) справедливо и в трехмерном случае.

8. Имеется еще целый ряд аналогий. Например, угловая скорость Ω входит в уравнение движения жидкости таким же образом, как и магнитное поле \mathbf{B} в уравнение для заряженной частицы. Уравнение для дрейфовых волн сходно с гидродинамическим [71]. Мы, однако, не будем ими пользоваться.

1.6. Токи в космической плазме

Токовые скорости. Как уже отмечалось в разд. 1.2, характерные токовые скорости очень малы. В этом можно убедиться, оценивая (1.72):

$$\begin{aligned} \frac{u_d}{u_{T_i}} &= \frac{c^2 \omega_e}{\omega_p^2 L u_{T_i}} = \frac{c^2 \omega_i}{\Omega_p^2 L u_{T_i}} = \\ &= \frac{l_p^2}{r_i L} = \frac{c_A}{u_{T_i}} \frac{l_p}{L} = \beta^{-1/2} \frac{l_p}{L} = \frac{r_i}{\beta L} \end{aligned} \quad (1.134)$$

(см. (1.90)). Размер l_p обычно очень мал по сравнению с L , и если даже $l_p \gg r_i$ (или $c_A \gg u_{T_i}$), то все равно отношение $u_d/u_{T_i} \ll 1$. С другой стороны, токовая скорость в бесстолкновительной плазме определяется дрейфом частиц из-за неоднородной плотности

(и/или температуры). Скорость дрейфа можно оценить:

$$u_d = u_{T_i} \frac{r_i}{L} \frac{\delta n}{n}. \quad (1.135)$$

Сопоставляя (1.135) с (1.134) и учитывая, что $\delta n \leq n$, получим

$$\beta \geq 1. \quad (1.136)$$

Конечно, неравенство (1.136) не должно выполняться всюду. Эта оценка означает, что β не может быть меньше единицы во всем пространстве. Так, бестоковые поля (см. разд. 1.3) могут существовать в вакууме, при этом $\beta = 0$. Однако таковыми они могут быть только в части пространства, иначе говоря, должны быть внешние источники поля. То же самое относится к бессиловым полям (см. разд. 1.3). Они как раз и реализуются при $\beta \ll 1$, но не могут существовать во всем пространстве, т. е. должны быть внешние источники (см. разд. 5.6).

Характерный пример. Обратимся к равновесной конфигурации с нейтральным слоем, изображенной на рис. 1.1. Величина β меняется от точки к точке. Так, в окрестности нейтрального слоя $\beta \rightarrow \infty$, в то время как на периферии при $y \rightarrow \pm \infty$, где $\mathbf{V} \rightarrow V_\infty = \text{const}$, β может стать меньше единицы. Обозначим через p_0 давление в нейтральном слое; под β будем понимать в данном случае величину $\beta_0 = 8\pi p_0 / B_\infty^2$. Для нее, конечно, неравенство (1.136) выполняется, в чем можно убедиться, воспользовавшись (1.86).

При таком определении β в (1.90) есть отношение характерного плазменного давления к характерному магнитному. Но главное, именно эту величину β_0 следует подставить в оценку (1.134), откуда с учетом (1.136) опять получаем $u_d / u_{T_i} \ll 1$.

В космической электродинамике обсуждаемую конфигурацию рис. 1.1 чаще всего рассматривают в частном случае отсутствия плазмы на периферии: $p \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$. Тогда (1.86) конкретизируется:

$$p + B^2/8\pi = p_0 = B_\infty^2/8\pi. \quad (1.137)$$

При этом $\beta_0 = 1$ или

$$\tilde{l}_p = r_i, \quad l_p = r_e. \quad (1.138)$$

Выпишем, в частности, решение Харриса

$$B_z = B_\infty \text{th}(y/L), \quad A_x = -LB_\infty \ln \text{ch}(y/L), \quad (1.139)$$

которое является точным в кинетике (т. е. не только в МГД). Здесь уместно заметить, что \tilde{l}_p и r_i — чисто плазменные параметры размерности длины. Они всегда пренебрежимо малы по сравнению со всеми гидродинамическими размерами. Или можно сказать иначе: если характерные размеры полей сравнимы с \tilde{l}_p или r_i , то чисто плазменные явления становятся существенными. В важном частном случае (1.137), когда выполняется (1.138), остается один плазменный параметр r_i — ионный гирорадиус.

Конфигурация (1.137) является равновесной. Представляет интерес рассмотреть процесс установления равновесия, если начальная плотность мала, т. е. начальное условие $\beta = \beta(0) \ll 1$ (условия солнечной короны). Пусть в начальный момент $\mathbf{V} = \{0, 0, V_z(y)\}$, $V_z = 0$ при $y = 0$, характерный размер изменения поля $\sim L$. Это начальное состояние не может быть равновесным, так как давление плазмы при $y = 0$ мало ($\beta(0) \ll 1$) и не способно уравновесить магнитное. Поэтому начинается движение плазмы с полем в направлении оси z , в результате которого плазма концентрируется в окрестности $y = 0$. Согласно (1.137) давление должно увеличиться в $\beta(0)^{-1}$ раз, т. е. сжатие происходит в $\beta(0)^{-1/\gamma}$ раз. Во столько же раз возрастает напряженность поля B_z , которое в окрестности $y = 0$ может быть представлено в виде $B_z = B_\infty y/L$. Но в конечном состоянии (1.137) B_z не превышает B_∞ , поэтому сжатие происходит с расстояния y , определяемого из условия $B_\infty (y/L) \beta(0)^{-1/\gamma} = B_\infty$, т. е. $y = L\beta(0)^{1/\gamma}$. После сжатия в $\beta(0)^{-1/\gamma}$ раз это расстояние станет равным

$$\delta_p = L\beta(0)^{2/\gamma} \quad | \quad (1.140)$$

и представляет собой толщину плазменного слоя конфигурации (1.137) (подробнее см. [41, гл. V, § 1]). Таким образом, при $\beta(0) \ll 1$ естественным образом появляется новый характерный размер δ_p (1.140), $\delta_p \ll L$, который, впрочем, в реальных условиях все еще велик по сравнению с плазменными параметрами (1.138).

Глава 2. ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

2.1. Простые волны в магнитной гидродинамике

Проанализируем частные решения нелинейной системы МГД-уравнений (1.39)—(1.43) специального вида, получающиеся при следующих предположениях: а) всеми диссипативными эффектами пренебрегается; б) все величины зависят только от x и t , причем последние входят в аргументы искомых функций в виде некоторой единой комбинации $\varphi(x, t)$, т. е. $u(\varphi)$, $V(\varphi)$ и т. д. Последнее условие означает, что все МГД-параметры системы могут быть выражены как функции одного из них (но такого, который в рассматриваемых условиях не остается постоянным). Мы будем предполагать эту зависимость однозначной. Движения, обладающие перечисленными выше свойствами, называются *простыми волнами*.

Запишем систему уравнений (1.39)—(1.43) для простых волн, которые будем характеризовать следующими макроскопическими параметрами: удельной энтропией s , плотностью ρ , гидродинамической скоростью u , магнитной индукцией V . Последний вектор имеет только две неизвестные компоненты, так как из уравнения индукции и уравнения Максвелла $\operatorname{div} V = 0$ следует

$$V_x = \text{const.} \quad (2.1)$$

Остальные уравнения преобразуем с учетом того, что все искомые величины зависят от одной функции $\varphi(x, t)$:

$$\partial_t \rho + u_x \partial_x \rho = \rho' (\partial_t \varphi + u_x \partial_x \varphi), \quad (2.2)$$

где $\rho' = d\rho/d\varphi$. Учтем далее, что поверхности постоянного значения физических величин — это плоскости, на которых

$$\varphi(x, t) = \text{const}, \quad (2.3)$$

перемещающиеся в направлении оси x . Скорость их перемещения $dx/dt = v_{ph}$ естественно назвать фазовой скоростью по аналогии со случаем плоских монохроматических волн. Ее нетрудно выразить через производные от φ с помощью равенства $d\varphi = \partial_t \varphi dt + \partial_x \varphi dx$, откуда (в предположении $\partial_x \varphi \neq 0$)

$$v_{ph} = dx/dt = -\partial_t \varphi / \partial_x \varphi. \quad (2.4)$$

Возвращаясь к равенству (2.2), находим

$$\partial_t \rho + u_x \partial_x \rho = -\rho' v \partial_x \varphi, \quad (2.5)$$

где $v = v_{ph} - u_x$ — скорость распространения простой волны в сопутствующей плазме системе отсчета.

Очевидно, что таким же путем можно исключить производные по времени из всех уравнений, в которые они входят. Прделав эту процедуру и поделив затем обе части равенств на $\partial_x \varphi$, придем к системе уравнений

$$s'v = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho'v - u'_x \rho = 0, \quad (2.7)$$

$$u'_x v - \rho^{-1} p' - (4\pi\rho)^{-1} (B_y B'_y + B_z B'_z) = 0, \quad (2.8)$$

$$u'_y v - (4\pi\rho)^{-1} B_x B'_y = 0, \quad (2.9)$$

$$u'_z v - (4\pi\rho)^{-1} B_x B'_z = 0, \quad (2.10)$$

$$B'_y v - u'_x B_y + u'_y B_x = 0, \quad (2.11)$$

$$B'_z v - u'_x B_z + u'_z B_x = 0, \quad (2.12)$$

$$p = p(s, \rho). \quad (2.13)$$

Здесь штрихом обозначена производная по φ , последнее равенство — уравнение состояния среды. Рассмотрим теперь последовательно различные типы простых волн, допускаемые системой (2.6)—(2.13).

Энтропийные простые волны. Так называются движения, в которых испытывает возмущения энтропия плазмы: $s' \neq 0$. Из (2.6) следует, что при этом

$$v \equiv v_e = 0 \quad (2.14)$$

— энтропийная волна неподвижна в системе покоя плазмы и переносится вместе со средой. Если $B_x \neq 0$, то из уравнений (2.7)—(2.12) последовательно вытекает:

$$u'_x = B'_y = B'_z = u'_y = u'_z = p' = 0,$$

т. е. давление p , гидродинамическая скорость u и магнитное поле B постоянны. Плотность плазмы ρ испытывает возмущения, связанные с возмущениями энтропии уравнением (2.13) и условием $p = \text{const}$. Из этих соотношений следует, что в пренебрежении диссипативными процессами профиль энтропийной волны не искажается. Фактически малые, но конечные теплопроводность и диффузия нагретых частиц приводят к медленной диссипации энтропийных возмущений.

При $B_x = 0$ из (2.7), (2.8) следует постоянство продольной скорости и полного давления'

$$u_x = \text{const}, \quad p + (B_y^2 + B_z^2)/8\pi = \text{const}. \quad (2.15)$$

Производные же u'_y и u'_z могут иметь произвольные значения.

Переходя к анализу других типов простых волн, заметим, что при $v \neq 0$ из (2.6) следует $s' = 0$, т. е.

$$s = \text{const.} \quad (2.16)$$

Таким образом, простые волны с $v \neq 0$ представляют собой движения с постоянной энтропией. Это позволяет записать в уравнении (2.8) $p' = c_s^2 \rho'$, где

$$c_s = [(\partial p / \partial \rho)_s]^{1/2} \quad (2.17)$$

— локальное значение скорости звука в плазме без магнитного поля. Будучи функцией плотности, эта величина, вообще говоря, непостоянна.

Альвеновские простые волны — это движения, при которых наряду с энтропией остается постоянной плотность плазмы:

$$\rho = \text{const.} \quad (2.18)$$

Из уравнений (2.7), (2.8) следует

$$u_x = \text{const}, \quad B_y^2 + B_z^2 \equiv B_{\perp}^2 = \text{const.} \quad (2.19)$$

а уравнения (2.9)—(2.12) разбиваются на две одинаковые пары:

$$u'_y v + (4\pi\rho)^{-1} B_x B'_y = 0, \quad u'_y B_x + B'_y v = 0 \quad (2.20)$$

и аналогичную систему для величин u'_z, B'_z .

Равенства (2.1), (2.19) показывают, что в альвеновской простой волне модуль вектора магнитного поля остается постоянным — происходит только его поворот. Например, при гармонической зависимости от времени и координаты бегущая вдоль однородного магнитного поля волна имеет круговую поляризацию

$$B_y = B_{\perp} \cos k[x - (c_{Ax} + u_x)t], \\ B_z = B_{\perp} \sin k[x - (c_{Ax} + u_x)t].$$

Из (2.20) определяется скорость альвеновской волны относительно плазмы:

$$v \equiv c_{Ax} = \pm |B_x| (4\pi\rho)^{-1/2}. \quad (2.21)$$

Эта скорость также остается постоянной в силу (2.1), (2.18). При $B_x = 0$ имеем из (2.9)—(2.12) $u = \text{const}$, $\mathbf{B} = \text{const}$, т. е. альвеновской простой волны в этом случае не существует.

Из систем (2.20) и аналогичной системы для u'_z, B'_z находим связь между скоростью и магнитным полем:

$$u_y = \mp B_y (4\pi\rho)^{-1/2} + u_y^0, \quad u_z = \mp B_z (4\pi\rho)^{-1/2} + u_z^0, \quad (2.22)$$

где u_y^0, u_z^0 — постоянные; знак минус соответствует одинаковым знакам B_x и c_{Ax} ; знак плюс — противоположным знакам.

Выбором системы отсчета всегда можно добиться параллельности векторов \mathbf{u} и \mathbf{B} в альвеновской простой волне:

$$\mathbf{u} = \mp \mathbf{B} (4\pi\rho)^{-1/2}. \quad (2.23)$$

Вследствие постоянства фазовой скорости c_{Ax} альвеновская волна распространяется без искажения формы, а величины u и B в (2.23) зависят от x и t в комбинации $x - (c_{Ax} + u_x) t$.

Быстрые и медленные простые волны. Рассмотрим теперь решения системы (2.6)–(2.13), у которых $\rho' \neq 0$, а $v \neq v_e$, c_{Ax} . Для упрощения геометрии выбираем систему отсчета так, чтобы при некотором значении φ было $u_z = B_z = 0$. Тогда из (2.10), (2.12) следует, что при $v^2 \neq c_{Ax}^2$ $u'_z = B'_z = 0$, т. е. равенства $u_z = B_z = 0$ имеют место при всех φ . Оставшаяся система четырех уравнений (2.7)–(2.9), (2.11) имеет нетривиальное решение при значениях фазовой скорости

$$v^2 \equiv v_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \{ c_s^2 + c_A^2 \pm [(c_s^2 + c_A^2)^2 - 4c_s^2 c_{Ax}^2]^{1/2} \}, \quad (2.24)$$

где использовано обозначение

$$c_A = B (4\pi\rho)^{-1/2}. \quad (2.25)$$

Сравнение формул (2.21), (2.24) показывает, что при любых значениях магнитного поля и скорости звука выполняются следующие соотношения:

$$v_f^2 \geq c_{Ax}^2 \geq v_s^2 \geq 0, \quad v_f^2 \geq c_s^2, \quad v_s^2 \leq c_s^2. \quad (2.26)$$

Последние два неравенства объясняют названия рассматриваемых волн — они являются быстрыми (fast) или медленными (slow) по сравнению с обычными звуковыми волнами в плазме без магнитного поля.

После подстановки v_f или v_s в систему (2.7)–(2.9), (2.11) она может быть проинтегрирована. Ввиду сложности этой процедуры в общем случае выполним ее для поперечного распространения, т. е. при $B_x = 0$, $B_y^2 = B^2$. При этом $v_f = \pm (c_s^2 + c_A^2)^{1/2}$, $v_s = 0$, т. е. может существовать только быстрая волна. Из уравнений (2.7), (2.8) находим, выбрав в качестве независимой переменной плотность,

$$u_y = \text{const}, \quad du_x/d\rho = v_f/\rho, \quad dB^2/d\rho = 8\pi c_A^2. \quad (2.27)$$

Интегрирование второго уравнения с учетом (2.25) дает

$$B = B_0 \rho / \rho_0, \quad (2.28)$$

где B_0 — значение поля при $\rho = \rho_0$ (например, в невозмущенной области). Равенство (2.28) выражает собой условие вмороженности поля в плазму. Используя его, а также зная уравнение состояния (2.13), находим зависимость v_f от ρ :

$$u_x(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} [v_f(\rho)/\rho] d\rho, \quad (2.29)$$

где положено $u_x(\rho_0) = 0$. Далее, с помощью (2.4) записываем $dx/dt = v_f(\rho) + u_x(\rho)$ и получаем решение

$$x = [v_f(\rho) + u_x(\rho)] t + f(\rho), \quad (2.30)$$

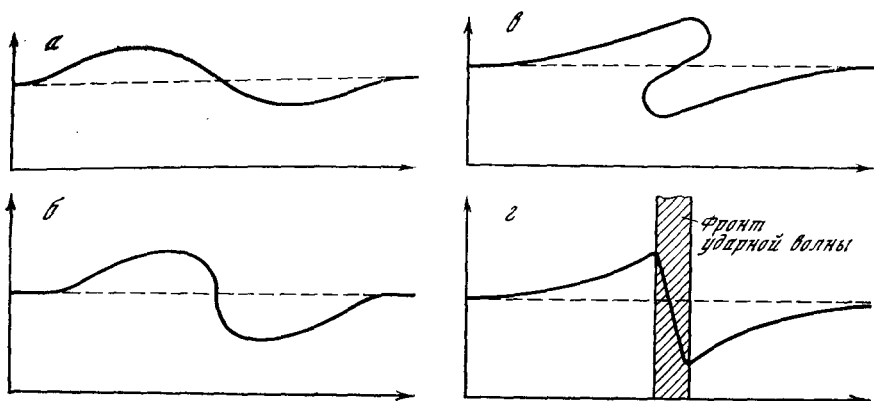


Рис. 2.1. Искажение профиля простой волны и формирование ударного фронта

$a - t = 0$; $б - t_1 > 0$; $в - t_2 > t_1$

которое определяет в неявном виде зависимость $\rho(x, t)$. Вид функции $f(\rho)$ устанавливается по начальному условию $\rho(x, 0) = F(x)$.

Найденные решения (энтропийная, альвеновская, быстрая и медленная волны) исчерпывают все возможные типы простых волн в магнитной гидродинамике.

Искажение профиля быстрой и медленной волн. В отличие от альвеновской волны профили быстрой и медленной волн искажаются при распространении, так как их фазовые скорости зависят от плотности. Исследуем знак производной $d |v_{f,s}^{ph}| / d\rho = d |v_{f,s} + u_x| / d\rho$. Поскольку равенство (2.29) есть следствие уравнения неразрывности и справедливо для любой волны, то

$$d |v_{f,s}^{ph}| / d\rho = \rho^{-1} d(\rho |v_{f,s}|) / d\rho. \quad (2.31)$$

В отсутствие магнитного поля ($B = 0$) медленная волна исчезает, а быстрая распространяется со скоростью $v_f = c_s$. Если плазму рассматривать как идеальный газ, то $p(\rho) \sim \rho^\gamma$, где $\gamma = \text{const}$ — показатель адиабаты. При этом $c_s \sim \rho^{(\gamma-1)/2}$ и $d(\rho c_s) / d\rho = (\gamma + 1) c_s / 2 > 0$. Таким образом, в этом случае скорость более плотных областей выше, чем менее плотных. В результате участки профиля волны, на которых плотность убывает в направлении распространения, становятся более крутыми, а участки с возрастающей плотностью — более пологими (рис. 2.1). В некоторый момент времени на переднем фронте возникает вертикальный участок (рис. 2.1, б), после чего решение формально станет неоднозначным (рис. 2.1, в). Но такое состояние физически нереализуемо, так как решение типа простой волны не учитывает диссипативных процессов. Между тем по мере укрупнения фронта их роль возрастает, в результате чего на переднем фронте формируется узкая переходная область с большими градиентами физических величин ρ , p , B и сильной диссипацией — ударная волна (рис. 2.1, г). Во мно-

гих случаях толщина ее фронта оказывается настолько малой, что его можно рассматривать как бесконечно тонкую поверхность разрыва макроскопических параметров¹.

Выше мы рассмотрели уравнение состояния идеального газа. Но качественный вывод об укрупнении фронта сохраняется и для других уравнений состояния при условии $\partial^2(1/\rho)/\partial p^2 > 0$. Он остается в силе и при наличии магнитного поля: фронты сжатия как быстрых, так и медленных простых волн укрупняются при выполнении указанного выше неравенства. Довольно громоздкое доказательство этого утверждения можно найти в [106].

2.2. Линейные моды и их свойства

При рассмотрении МГД-волн малой амплитуды можно исходить из линеаризованной системы уравнений (1.39)–(1.43). Представим макропараметры плазмы в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}$, $s = s_0 + \delta s$ и т. д., где индексом 0 обозначено невозмущенное значение величины, не зависящее от координат и времени, δ — малое возмущение, которое учитывается только в линейном приближении. Линеаризованная система МГД-уравнений в этих обозначениях принимает вид

$$\begin{aligned} \partial_t \delta s + \mathbf{u}_0 \nabla \delta s &= 0, & \partial_t \delta \rho + \mathbf{u}_0 \nabla \delta \rho + \rho_0 \nabla \delta \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \delta \mathbf{u} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \delta \mathbf{u} + \rho_0^{-1} \nabla \delta p + (4\pi \rho_0)^{-1} \mathbf{B}_0 \times \text{rot } \delta \mathbf{B} &= 0, & (2.32) \\ \partial_t \delta \mathbf{B} + (\mathbf{u}_0 \nabla) \delta \mathbf{B} + \mathbf{B}_0 (\nabla \delta \mathbf{u}) - (\mathbf{B}_0 \nabla) \delta \mathbf{u} &= 0, \\ \nabla \delta \mathbf{B} &= 0, & p = p(s, \rho). \end{aligned}$$

Ищем решение этой системы в виде плоских монохроматических волн: $\delta s \approx \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$ и т. д. и получаем алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega' \delta s &= 0, & \omega' \delta \rho - \rho_0 \mathbf{k} \delta \mathbf{u} &= 0, \\ \omega' \delta \mathbf{u} - \rho_0^{-1} (\delta p + (4\pi)^{-1} \mathbf{B}_0 \delta \mathbf{B}) \mathbf{k} + (4\pi \rho_0)^{-1} (\mathbf{k} \mathbf{B}_0) \delta \mathbf{B} &= 0, & (2.33) \\ \omega' \delta \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 (\mathbf{k} \delta \mathbf{u}) + (\mathbf{B}_0 \mathbf{k}) \delta \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{k} \delta \mathbf{B} &= 0, & \delta p = c_s^2 \delta \rho + (\partial p / \partial s)_{\rho} \delta s, \end{aligned}$$

где в отличие от (2.17) $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_0$ — невозмущенный квадрат скорости звука; $\omega' = \omega - \mathbf{u}_0 \mathbf{k}$ — частота в сопутствующей системе, испытавшая доплеровский сдвиг относительно частоты в лабораторной системе отсчета.

Энтропийно-вихревые возмущения в отсутствие внешнего магнитного поля. Полагая в системе (2.32) $\mathbf{B}_0 = 0$ и $\delta s \neq 0$, находим $\omega' = 0$, т. е. $\omega = \mathbf{k} \mathbf{u}_0$. Это означает, что возмущения энтропии

¹ Поверхности, на которых испытывают скачок плотность, давление и другие макроскопические параметры, называются поверхностями сильных разрывов. Если же указанные параметры непрерывны, но терпят разрывы их производные первого или высших порядков, то такие разрывы называются слабыми. Поверхности слабых разрывов перемещаются в пространстве с одной из скоростей v_e, c_{Ax}, v_j, v_s .

неподвижны относительно плазмы и переносятся со скоростью движения среды u_0 . При этом также $k\delta u = 0$, $k\delta V = 0$ и $\delta p = 0$, но в силу последнего уравнения (2.33) возмущение плотности $\delta\rho \neq 0$ и выражается через δs . При $\omega' = 0$ могут быть отличны от нуля также поперечные относительно \mathbf{k} составляющие δu_{\perp} и δV_{\perp} . Следовательно, в общем случае $\mathbf{k} \times \delta u \neq 0$ и $\mathbf{k} \times \delta V \neq 0$, т. е. наряду с энтропийными возмущениями существуют переносимые со скоростью плазмы возмущения $\text{rot } \delta u$ и $\text{rot } \delta V$. В отсутствие V_0 они независимы и не связаны с возмущением δs .

Звуковые волны. При $\delta s = 0$ возможны колебания с $\omega' \neq 0$. Если по-прежнему $V_0 = 0$, то при $\omega' \neq 0$ из (2.33) следует $\delta V = 0$ и $\delta u_{\perp} = 0$, а возмущения δu_{\parallel} и $\delta\rho$ удовлетворяют системе уравнений

$$\omega' \delta\rho - \rho_0 k \delta u_{\parallel} = 0, \quad c_s^2 k \delta\rho - \rho_0 \omega' \delta u_{\parallel} = 0, \quad (2.34)$$

которая описывает звуковые волны с законом дисперсии

$$\omega'^2 = (c_s k)^2, \quad \omega = \pm c_s k + u_0 k. \quad (2.35)$$

Энтропийные возмущения в магнитном поле. При $\delta s \neq 0$ и $kV_0 \neq 0$ получаем из (2.33) $\omega = u_0 k$, $\delta V = 0$, $\delta u = 0$, $\delta p = 0$, $\delta\rho \neq 0$; таким образом, энтропийные возмущения снова переносятся плазмой, но независимых друг от друга и переносимых средой возмущений $\text{rot } \delta u$ и $\text{rot } \delta V$ не существует.

Альвеновские волны. Рассмотрим теперь возмущения, в которых $\delta s = 0$ и $\delta\rho = 0$, но $\omega' \neq 0$. Из (2.33) следует $V_0 \delta V = 0$, т. е. $\delta V \perp V_0$. Поскольку также $\delta V \perp \mathbf{k}$, то рассматриваемые возмущения поляризованы таким образом, что δV перпендикулярно плоскости (\mathbf{k}, V_0) . Величины δu и δV удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \omega' \delta u + (4\pi\rho_0)^{-1} (\mathbf{k}V_0) \delta V &= 0, & \mathbf{k}\delta u &= 0, \\ (\mathbf{k}V_0) \delta u + \omega' \delta V &= 0, & \mathbf{k}\delta V &= 0, \end{aligned} \quad (2.36)$$

описывающих альвеновские волны. Решая систему (2.36), находим

$$\omega' = \pm |k c_A|, \quad \delta u = \mp \delta V (4\pi\rho_0)^{-1/2}. \quad (2.37)$$

Здесь c_A определяется формулой (2.25); знак минус в формуле связи δu с δV отвечает одинаковым знакам ω' и $k c_A$; знак плюс — различным знакам этих величин. Из (2.36), (2.37) следует

$$\text{rot } \delta u = \mp (4\pi\rho_0)^{-1/2} \text{rot } \delta V; \quad (2.38)$$

в альвеновской волне оба ротора не независимы и распространяются с альвеновской скоростью относительно плазмы.

Магнитный звук. При $\delta s = 0$, но $\delta\rho \neq 0$ получим из (2.33) систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega' \delta\rho - \rho_0 k \delta u &= 0, & \mathbf{k}\delta V &= 0, \\ c_s^2 k \delta\rho - \rho_0 \omega' \delta u + (4\pi)^{-1} \mathbf{k} (V_0 \delta V) - (4\pi)^{-1} (\mathbf{k}V_0) \delta V &= 0, \\ (\mathbf{k}V_0) \delta u - V_0 (k\delta u) + \omega' \delta V &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Приравнивая нулю определитель системы, найдем фазовые скорости $v = \omega'/k$ быстрой и медленной магнитозвуковых волн. Они даются формулой (2.24), в которой c_s , c_A определяются невозмущенными параметрами плазмы, а c_{Ax} нужно понимать как проекцию c_A на направление \mathbf{k} .

Направления векторов $\delta\mathbf{V}$, $\delta\mathbf{u}$ нетрудно определить из системы (2.39): $\delta\mathbf{V}$ лежит в плоскости $(\mathbf{k}, \mathbf{V}_0)$ и перпендикулярен вектору \mathbf{k} . Вектор $\delta\mathbf{u}$ лежит в этой же плоскости, но имеет в общем случае обе составляющие: вдоль и перпендикулярно \mathbf{k} .

Поперечное распространение. При $\mathbf{V}_0 \neq 0$, но $\mathbf{k} \perp \mathbf{V}_0$ система уравнений (2.33) допускает как энтропийные возмущения ($\delta s \neq 0$), так и возмущения МГД-величин, не связанные с изменением энтропии. В первом случае ($\delta s \neq 0$) имеем $\mathbf{k}\delta\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{k}\delta\mathbf{V} = 0$. Отсутствует также возмущение полного давления $\delta p + + (4\pi)^{-1} \mathbf{V}_0 \delta\mathbf{V} = 0$. Но при этом могут существовать независимые от δs и друг от друга вихревые возмущения $\text{rot } \delta\mathbf{V}$, $\text{rot } \delta\mathbf{u}$.

При $\delta s = 0$ отлична от нуля только составляющая $\delta\mathbf{u}$, параллельная \mathbf{k} , как в случае обычного звука. Как следует из (2.33), величины $\delta\rho$ и $\mathbf{k}\delta\mathbf{u}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \omega' \delta\rho - \rho_0 \mathbf{k}\delta\mathbf{u} &= 0, \\ - (k^2 c_s^2 / \rho_0) \delta\rho + (\omega' - k^2 c_A^2 / \omega') (\mathbf{k}\delta\mathbf{u}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из нее определяется закон дисперсии поперечного звука:

$$\omega' = \pm k (c_s^2 + c_A^2)^{1/2}. \quad (2.41)$$

Возмущение магнитного поля параллельно \mathbf{V}_0 и пропорционально возмущению плотности:

$$\delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \delta\rho / \rho_0. \quad (2.42)$$

Таким образом, при поперечном распространении, кроме энтропийных возмущений, могут существовать только волны типа обычного звука, в которых скорость плазмы параллельна направлению распространения, а скорость звука c_s заменена на $(c_s^2 + c_A^2)^{1/2}$, т. е. перенормирована магнитным полем.

Продольное распространение. При $\mathbf{k} \parallel \mathbf{V}_0$ система (2.33), кроме энтропийных возмущений, допускает два типа волн: обычный звук, описываемый уравнениями (2.34), (2.35), на который магнитное поле не влияет, и альвеновские волны с $\delta\mathbf{u}$ и $\delta\mathbf{V}$, перпендикулярными общему направлению \mathbf{k} и \mathbf{V}_0 . Эти волны удовлетворяют соотношениям (2.37). Они могут иметь линейную, круговую или эллиптическую поляризацию — по два линейно независимых типа поляризации при каждом значении частоты. Но более точное рассмотрение с учетом дисперсионных поправок (см. разд. 8.7) показывает, что в действительности собственными модами в этом случае являются две волны с круговыми поляризациями и противоположными направлениями вращения. Одна из них — альвеновская $\delta\mathbf{V} = \delta\mathbf{V}_x + i\delta\mathbf{V}_y$, если ось z ориентирована вдоль \mathbf{k} ; в этой волне электрический вектор вращается в направлении циклотронного вращения ионов. Вторая волна $\delta\mathbf{V} = \delta\mathbf{V}_x - i\delta\mathbf{V}_y$ является быстрой

магнитозвуковой (при $c_A > c_s$) или медленной магнитозвуковой (при $c_A < c_s$). В ней электрический вектор вращается в направлении вращения электронов.

Полный набор линейных мод. С учетом условия $k\delta V = 0$ четвертое уравнение системы (2.33) дает два уравнения в проекциях на оси, перпендикулярные \mathbf{k} . Проекция же на \mathbf{k} сводит указанное уравнение к тождеству $0 = 0$. Поэтому система (2.33) содержит всего семь уравнений для определения семи величин. В общем случае, как мы видели, имеются семь различных (и линейно независимых) решений: одна энтропийная волна, две альвеновские, две быстрые и две медленные магнитозвуковые волны (решения, различающиеся знаками ω' , следует рассматривать как различные). Эти решения составляют полную систему линейных собственных мод, по которым может быть разложено произвольное малое возмущение [204, 8].

Любое возмущение МГД-параметров порождает те или иные МГД-моды. Поэтому способы их возбуждения в космических условиях могут быть весьма разнообразны. Это, прежде всего, механические движения плазмы, вызванные быстрыми превращениями энергии (вспышки), гидродинамической неустойчивостью (конвекция), нагревом (солнечный и звездные ветры), вращением и другими причинами. МГД-моды часто генерируются при нелинейных взаимодействиях МГД-волн друг с другом или с каким-либо нелинейными возмущениями (например, с ударными волнами — см. гл. 9). МГД-моды могут возбуждаться сторонним током в плазме, т. е. внешним источником, создающим ток. Наконец, существуют и чисто кинетические механизмы возбуждения МГД-волн, связанные с неравновесностью функции распределения частиц в плазме. Например, релятивистские частицы (космические лучи), функция распределения которых достаточно анизотропна, способны генерировать МГД-волны.

2.3. Затухание МГД-волн

Предыдущее рассмотрение волн в этой главе не учитывало диссипативных процессов, которые обуславливают затухание механических движений и магнитного поля. Затухание МГД-волн можно характеризовать величиной Q — плотностью мощности тепловыделения, т. е. диссипацией энергии волны в единице объема за единицу времени. Для вычисления этой величины воспользуемся уравнением баланса энергии, преобразованным в уравнение неразрывности для удельной энтропии [113]

$$\partial_t (\rho s) + \nabla (\rho s \mathbf{u}) = \dot{S}, \quad (2.43)$$

где \dot{S} — плотность источника энтропии:

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \operatorname{div} (\kappa \nabla T / T) + \kappa (\nabla T)^2 / T^2 + (\eta / 4\pi T) (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2 + \\ & + (\rho \eta_1 / 2T) (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - (2/3) \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{u})^2 + (\rho \eta_2 / T) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Здесь η — коэффициент диффузии магнитного поля (магнитная вязкость); η_1 и η_2 — коэффициенты кинематической вязкости (первой и второй).

Первый член в правой части (2.44) знакопеременен и обращается в нуль при интегрировании по всему пространству. Систематическое тепловыделение описывают положительные квадратичные слагаемые в (2.44). Обозначив их через S , будем иметь

$$Q = TS = \kappa (\nabla T)^2 / T + (\rho \eta_1 / 2) (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha - (2/3) \delta_{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{u})^2 + \rho \eta_2 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + (\eta / 4\pi) (\operatorname{rot} \mathbf{B})^2. \quad (2.45)$$

Последнее выражение описывает тепловыделение за счет трех диссипативных процессов: теплопроводности, вязкости и джоулева нагрева.

Декремент γ (мнимую часть частоты) слабо затухающих плоских монохроматических волн в неподвижной среде можно вычислить по формуле

$$\gamma = \bar{Q} / 2\bar{w}, \quad (2.46)$$

где w — плотность энергии волны; чертой сверху обозначены средние значения за период. Величина γ характеризует затухание МГД-величин при выключении источников движения, которое будет происходить по закону $\delta u = \delta u_0 \exp(-\gamma t)$ и т. д. (для плотности энергии $\bar{w} \sim \exp(-2\gamma t)$). Если же требуется найти коэффициент затухания волны на единицу пути, то следует воспользоваться формулой

$$\alpha = \bar{Q} / \bar{q}; \quad (2.47)$$

здесь \bar{q} — среднее значение абсолютной величины потока энергии в волне. Эта величина характеризует убыль амплитуды волны $\delta u = \delta u_0 \exp(-\alpha x)$ и т. д. по мере ее распространения от некоторого источника. В данном случае под x надо понимать координату в направлении потока энергии \bar{q} . Общие выражения для плотности энергии и плотности потока энергии хорошо известны [113]:

$$w = \rho (u^2/2 + \varepsilon) + B^2/8\pi, \quad (2.48)$$

$$\mathbf{q} = \rho \mathbf{u} (u^2/2 + \varepsilon + p/\rho) + (4\pi)^{-1} \mathbf{B} \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}], \quad (2.49)$$

где ε — внутренняя энергия на единицу массы; $\varepsilon + p/\rho$ — тепловая функция (энтальпия). В потоке энергии не учтены диссипативные члены.

С помощью приведенных выше формул и результатов разд. 2.2 нетрудно вычислить декременты γ для МГД-волн. Приведем окончательные результаты.

Звуковые волны ($\mathbf{B}_0 = 0$):

$$\gamma_s = (\omega^2 / 2c_s^2) [4\eta_1/3 + \eta_2 + (\kappa/\rho) (c_v^{-1} - c_p^{-1})]; \quad (2.50)$$

здесь c_v , c_p — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно. Коэффициент поглощения на единицу пути $\alpha_s = \gamma_s / c_s$, где c_s в данном случае — групповая скорость.

Альвеновские волны:

$$\gamma_A = \omega^2 (\eta + \eta_1) / 2c_A^2 \cos^2 \theta, \quad (2.51)$$

где θ — угол между направлением распространения волны и полем \mathbf{B}_0 . Поскольку групповая скорость альвеновских волн направлена вдоль \mathbf{B}_0 и равна c_A , будем иметь $\alpha_A = \gamma_A / c_A$.

Магнитозвуковые волны при $c_s \ll c_A$:

$$\gamma_f \approx \omega^2 \eta / 2c_A^2, \quad \gamma_s = \omega^2 \eta \sin^2 \theta / 2c_A^2 |\cos \theta|^3, \quad (2.52)$$

причем $\alpha_f = \gamma_f / c_A$, $\alpha_s = \gamma_s / c_s$. В общем случае выражения для α_f , α_s можно найти в [8].

2.4. МГД-волны в бесстолкновительной плазме

Если длина волны меньше транспортного пробега тепловых частиц, а частота волны превышает частоту столкновений, то такие волны можно считать бесстолкновительными. Хотя МГД-описание бесстолкновительной плазмы в некоторых частных случаях возможно (см. разд. 1.1), наиболее последовательный подход основан на использовании кинетического уравнения для частиц плазмы и уравнений Максвелла для электромагнитного поля. Для анализа линейных мод в бесстолкновительной плазме достаточно с помощью кинетического уравнения вычислить тензор диэлектрической проницаемости, который затем используется при записи уравнений электромагнитного поля и их решения.

Ниже мы приведем без вывода приближенное выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, связывающего фурье-компоненты вектора обобщенной электромагнитной индукции \mathbf{D} и вектора напряженности электрического поля ${}^2 \mathbf{E}$:

$$D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) E_\beta(\mathbf{k}, \omega). \quad (2.54)$$

Вычисление $\varepsilon_{\alpha\beta}$ можно найти, например, в [3, 8].

Пусть распределение частиц плазмы по скорости максвелловское, с различными в общем случае температурами электронов T_e и ионов T_i . Будем также считать, что длины волн колебаний велики по сравнению с ларморовскими радиусами частиц r_e , r_i , скорость поверхности постоянной фазы $\omega / |k_\parallel|$ вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 лежит между тепловыми скоростями v_{T_i} и

² Напомним, что в макроскопической электродинамике, и в частности в электродинамике плазмы, часто бывает удобно описывать электромагнитное поле с помощью трех векторов: \mathbf{E} , \mathbf{B} и

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)_i = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \mathbf{j}(\mathbf{r}, t') dt', \quad (2.53)$$

а не четырех (\mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{H}). При этом даже в изотропной среде $\varepsilon_{\alpha\beta}$ остается тензором, компоненты которого выражаются через скалярные диэлектрическую ε и магнитную μ проницаемости. Подробнее о таком способе описания в общем случае см., например, в [21], а для плазмы — в [3].

v_{Te} , а частоты волн достаточно низки. Последние три условия можно записать в виде неравенств

$$(k_{\perp} v_{Te, i})^2 \ll \omega_{Bi}^2, \quad v_{Ti} \ll \omega / |k_{\parallel}| \ll v_{Te}, \quad \omega^2 \ll \omega_{Bi}^2 \ll \omega_{pi}^2. \quad (2.55)$$

В этой области параметров компоненты тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}^2} = \frac{c^2}{c_A^2}, & \epsilon_{yy} &= \frac{c^2}{c_A^2} + i \sqrt{2\pi} \frac{\omega_{pe}^2 k_{\perp} v_{Te}}{\omega_{Be}^2 \omega |k_{\parallel}|}, \\ \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = -i \frac{\omega_{pe}^2 k_{\perp}}{\omega \omega_{Be} k_{\parallel}} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{Te}} \right), \\ \epsilon_{xy} &= \epsilon_{yx} = 0, \\ \epsilon_{zz} &= -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} \left(1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{Te}} \right), & \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Здесь система координат выбрана таким образом, что ось z совмещена с \mathbf{V}_0 , а волновой вектор имеет проекции $k_x = k_{\perp}$, 0 , $k_z = k_{\parallel}$.

Из уравнений Максвелла (1.4)–(1.7) и формулы связи (2.54) следует система однородных алгебраических уравнений для фурье-компонент электрического вектора:

$$(k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_{\alpha} k_{\beta} - (\omega^2/c^2) \epsilon_{\alpha\beta}) E_{\beta} = 0. \quad (2.57)$$

Подставив в эту систему компоненты (2.56) тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ и приравняв нулю определитель системы, получим уравнение для определения частот собственных мод магнитоактивной плазмы:

$$\begin{aligned} \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xx} \right) \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yy} \right) \epsilon_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yz}^2 \right] - \\ - k_{\perp}^2 \epsilon_{xx} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yy} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Оценка с помощью (2.55) показывает, что слагаемые в этом уравнении неравноценны: второе слагаемое содержит по сравнению с первым малый множитель $(\omega/\omega_{Bi})^2 \ll 1$. Пренебрегая такими членами, запишем дисперсионное уравнение в форме

$$\left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{xx} \right) \left[\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yy} \right) \epsilon_{zz} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{yz}^2 \right] = 0. \quad (2.59)$$

Корни этого уравнения, вообще говоря, комплексны: $\tilde{\omega} = \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k})$, \mathbf{k} — действителен. При $\gamma > 0$ происходит затухание соответствующей волны.

Равенство нулю первого сомножителя в (2.59) приводит к уравнению дисперсии для альвеновских волн

$$\omega_A = \pm |k_{\parallel} c_A| = \pm |k c_A|, \quad (2.60)$$

совпадающему с (2.37) для столкновительной плазмы. Затухание альвеновских волн в рассматриваемом приближении равно нулю,

по учет следующих членов разложения приводит к декременту

$$\gamma_A = |\omega| (\omega/\omega_B)^2 (m_e/m_i)^{1/2} f(\theta), \quad (2.61)$$

где $f(\theta)$ — сложная функция v_{T_e} , v_{T_i} , c_A и угла между B_0 и k , равная по порядку величины единице в области углов $\theta \approx 1$. При низких частотах $((\omega/\omega_B)^2 \ll 1)$ затухание альвеновских волн слабое независимо от соотношения между альвеновской и тепловыми скоростями.

Приравнивая нулю второй сомножитель в (2.59), находим частоты быстрой и медленной магнитозвуковых волн: $\omega_f = kv_f$ и $\omega_s = kv_s$. Фазовые скорости v_f , v_s даются по-прежнему формулой (2.24), в которой $c_s = (T_e/m_i)^{1/2}$ — скорость ионного звука. Что же касается затухания магнитозвуковых волн, то декременты также определяются из уравнения (2.59) и в приближении $\gamma_{s,f} \ll \ll |\omega_{s,f}|$ даются формулами

$$\gamma_{f,s} = \frac{kc_s}{2|\cos\theta|} \left(\frac{\pi m_e}{8m_i}\right)^{1/2} \left\{ 1 \pm \frac{[(c_s^2/c_A^2) \cos^2\theta - 1] \cos 2\theta}{[1 + c_s^4/c_A^4 - 2(c_s^2/c_A^2) \cos 2\theta]^{1/2}} \right\}. \quad (2.62)$$

Они существенно отличаются от формулы (2.52) для столкновительной плазмы, так как меняется сама природа затухания. В бесстолкновительной плазме оно вызывается резонансным взаимодействием частиц с волной (затухание Ландау). В рассматриваемом интервале фазовых скоростей (2.55) вклад в затухание вносят только электроны, число резонансных ионов в равновесной плазме экспоненциально мало. Декременты (2.62) содержат малый фактор $(\pi m_e/8m_i)^{1/2} \approx 10^{-2}$. Но, если фазовая скорость волны становится порядка тепловой скорости ионов, декременты магнитозвуковых волн приближаются к их частотам и волны быстро затухают.

Исключение составляют продольное и поперечное направления распространения. При $\theta \rightarrow 0$, как следует из (2.58), (2.62), поперечные волны (альвеновская и одна из магнитозвуковых, имеющая скорость c_A) имеют декременты $\gamma = 0$, а вторая магнитозвуковая (т. е. ионно-звуковая) волна имеет декремент $\gamma = (\pi m_e/8m_i)^{1/2} |\omega| \ll |\omega|$. Если учесть вклад ионов в затухание, то вместо последнего выражения получим

$$\gamma = |\omega| \left(\frac{\pi m_e}{8m_i}\right)^{1/2} \left[1 + \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{T_e}{T_i}\right) \right],$$

откуда видно, что $\gamma \ll |\omega|$ только при $T_e \gg T_i$. При $\theta \rightarrow \pi/2$ приведенные формулы неприменимы (нарушаются условия (2.55)), но соответствующее рассмотрение показывает, что волны затухают слабо.

В плазме низкого давления при $\beta = c_s^2/c_A^2 \ll 1$ все выражения существенно упрощаются. Из (2.24) находим

$$\omega_f = \pm kc_A, \quad \omega_s = \pm kc_s |\cos\theta|. \quad (2.63)$$

Декременты приобретают вид

$$\gamma_f = \left(\frac{\pi n_e}{8m_i} \right)^{1/2} \frac{c_s \sin^2 \theta}{c_A |\cos \theta|} |\omega_f|, \quad \gamma_s = \left(\frac{\pi n_e}{8m_i} \right)^{1/2} |\omega_s|. \quad (2.64)$$

Пределы применимости этих зависимостей ограничены неравенствами (2.55). В частности, медленная магнитозвуковая ветвь слабо затухает только при сильной неизотермии плазмы ($T_e \gg T_i$).

Выше были получены линейные декременты затухания Ландау. С ростом амплитуд магнитозвуковых волн резонансные частицы захватываются волнами, вследствие чего затухание уменьшается, переходит в нелинейный режим и начинает зависеть от частоты рассеяния частиц, выводящего их из режима захвата волной. Захват частиц волной означает образование горизонтального плато на графике их функции распределения, а слабое рассеяние приводит к сглаживанию плато. Нелинейное подавление затухания Ландау делает магнитозвуковые волны более долгоживущими и позволяет объяснить их существование даже в горячей плазме с $c_s \approx c_A$. Этот вопрос очень актуален для межпланетной и межзвездной плазм, в которых звуковая и альвеновская скорости — величины одного порядка. Попытка объяснить межпланетную и межзвездную турбулентность как слабую турбулентность альвеновских и быстрых магнитозвуковых волн была предпринята в работах [166, 167]. В указанных работах предполагалось, что МГД-волны искажают функцию распределения тепловых частиц, что приводит к уменьшению затухания Ландау и увеличивает время жизни волн.

Для быстрой магнитозвуковой волны нелинейный декремент был оценен по порядку величины в работе [160]. Вместо (2.64) при росте амплитуды волны до значения

$$\delta B/B_0 \gtrsim \sin^{-1} \theta (16\nu_i c_A / \pi \omega v_{T_i} |\cos \theta|)^{2/3}$$

декремент принимает вид

$$\gamma_f^{nl} \approx \nu_i (2m_e/m_i)^{1/2} (B_0/\delta B)^{2/3} \sin^{1/2} \theta \cos^{-2} \theta. \quad (2.65)$$

Здесь ν_i — частота рассеяния ионов за счет кулоновских соударений (или в результате наличия мелкомасштабных полей). Эти формулы предполагают, что $\sin \theta \gg \delta B/B_0$. Применимость выражения (2.65) ограничена и со стороны больших амплитуд: с ростом δB волна может «прокинуться» и превратиться в ударную, что приведет к изменению режима затухания.

2.5. Сильные МГД-разрывы и их классификация

Выше (в разд. 2.1) была рассмотрена физическая картина укрупнения переднего фронта простой магнитозвуковой волны и образования разрыва. В этом разделе мы проведем общее исследование локальных свойств МГД-разрывов и дадим их классификацию.

Условия на разрывах. Локальные свойства стационарных разрывов можно исследовать на основе законов сохранения основных

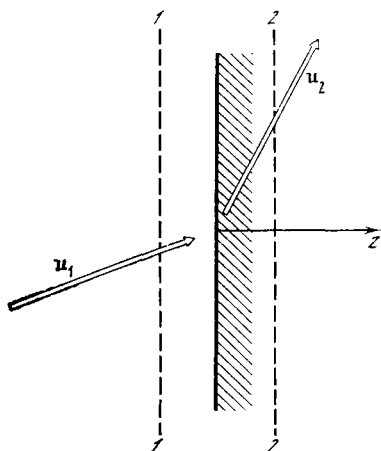


Рис. 2.2. Геометрия ударного фронта

физических величин — импульса, энергии, массы, дополненных граничными условиями для векторов электромагнитного поля. Предположим, что радиус кривизны поверхности разрыва велик по сравнению с его толщиной. Тогда разрыв можно считать локально плоским. Свяжем с разрывом систему координат, одну из осей которой направим по нормали к его плоскости (рис. 2.2). Тем самым фиксируется нормальная к разрыву компонента скорости системы отсчета.

Построим две вспомогательные плоскости 11 и 22 по обе стороны разрыва вблизи него таким образом, чтобы на этих поверхностях можно было пренебречь диссипативными процессами (которые могут быть весьма существенными

внутри переходного слоя, в области больших градиентов МГД-параметров). Считая разрыв стационарным и применяя законы сохранения, будем иметь

$$\delta(j_k n_k) = 0, \quad \delta(\Pi_{ik} n_k) = 0, \quad \delta(q_k n_k) = 0, \quad (2.66)$$

где δ — скачок соответствующей величины при переходе от плоскости 22 к плоскости 11, т. е. $\delta j_n = j_{n2} - j_{n1}$ и т. д.; \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности разрыва; \mathbf{j} , Π_{ik} и \mathbf{q} — соответственно плотности потоков массы, импульса и энергии:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}, \quad \Pi_{ik} = p \delta_{ik} + \rho u_i u_k - (4\pi)^{-1} B_i B_k + (8\pi)^{-1} B^2 \delta_{ik}; \quad (2.67)$$

поток энергии дается формулой (2.49). В потоках импульса Π_{ik} и энергии \mathbf{q} учтены как механические, так и электромагнитные слагаемые, но пренебрежено диссипативными эффектами.

Наряду с законами сохранения (2.66) на разрыве должны быть выполнены граничные условия для векторов электромагнитного поля: непрерывность нормальной \mathbf{B} и тангенциальной $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}/c$ компонент, т. е.

$$\delta(B_i n_i) = 0, \quad \delta(u B_k n_k - \mathbf{V} u_k n_k) = 0. \quad (2.68)$$

После подстановки выражений (2.67) в равенства (2.66) и использования граничных условий (2.68) приходим к четырем равенствам [113]:

$$j_n \delta(\mathbf{e} + pV + j_n^2 V^2/2 + u^2/2 + VB_t^2/4\pi) = (B_n/4\pi) \delta(B_t u_t), \quad (2.69)$$

$$\delta p + j_n^2 \delta V + (8\pi)^{-1} \delta B_t^2 = 0, \quad (2.70)$$

$$j_n \delta u_t = (B_n/4\pi) \delta B_t, \quad (2.71)$$

$$B_n \delta u_t = j_n \delta(VB_t). \quad (2.72)$$

Здесь индексы n и t обозначают нормальную и тангенциальную к плоскости разрыва компоненты; $V = \rho^{-1}$ — удельный объем. Равенства (2.69)—(2.72) образуют полную систему условий на МГД-разрывах. Они могут служить основой для их классификации. Следует отметить, что указанные условия обладают большей общностью, чем уравнения МГД. Они, в частности, сохраняют силу и в бесстолкновительной плазме, если давление в ней изотропно и определены локальные значения термодинамических и гидродинамических параметров.

Контактные разрывы. Так называются границы между двумя средами с различным составом и термодинамическими свойствами, неподвижными одна относительно другой. Случай контактного разрыва получается из уравнений (2.69)—(2.72) при $j_n = 0$ и в общем случае при $B_n \neq 0$. Из условий (2.71), (2.72) следует при этом

$$\delta u_t = 0, \quad \delta B_t = 0, \quad \delta p = 0, \quad (2.73)$$

т. е. гидродинамическая скорость, магнитное поле и давление непрерывны на контактной поверхности. Другие термодинамические величины, такие, как удельные объем V и внутренняя энергия ϵ , температура T , химический состав и т. д., могут испытывать скачок. Условия (2.73) на контактном разрыве могут выполняться и при $B_n = 0$. Последний случай особенно важен для бесстолкновительной плазмы, так как при этом силовые линии магнитного поля не пересекают контактную поверхность и она не размывается в результате свободного движения частиц вдоль силовых линий. Существование контактных поверхностей неоднократно регистрировалось [209] в межпланетной плазме в коротящих областях взаимодействия разноскоростных потоков солнечной плазмы. Они разделяют горячую разреженную плазму высокоскоростного потока и более плотную сравнительно холодную окружающую плазму.

Тангенциальные разрывы характеризуются отсутствием потока вещества ($j_n = 0$) и магнитного поля ($B_n = 0$) через поверхность разрыва. Скорость и магнитное поле имеют только тангенциальные составляющие, которые могут испытывать на разрыве произвольные скачки ($\delta u_t \neq 0$, $\delta B_t \neq 0$). Разрыв испытывают также термодинамические параметры плазмы, причем скачки давления и магнитного поля связаны условием непрерывности полного давления:

$$\delta (p + B_t^2/8\pi) = 0. \quad (2.74)$$

Тангенциальные разрывы постоянно присутствуют в плазме солнечного ветра.

Альвеновские, или вращательные, разрывы являются одной из модификаций нелинейных альвеновских волн. Они характеризуются наличием потока вещества через разрыв ($j_n \neq 0$), но отсутствием скачка плотности ($\delta V = 0$). В этом случае из уравнений (2.71) (2.72) следует:

$$j_n = \pm |B_n| (4\pi V)^{-1/2}, \quad \delta u_t = \pm \delta B_t (V/4\pi)^{1/2}. \quad (2.75)$$

После перегруппировки членов и сокращения множителя $j_n \neq 0$ уравнению (2.69) можно придать вид

$$\delta\varepsilon + V\delta(p + B_t^2/8\pi) + \delta[u_t \mp B_t (V/4\pi)^{1/2}]^2/2 = 0. \quad (2.76)$$

Третье слагаемое здесь равно нулю в силу (2.75), а второе — на основе уравнения (2.70) при $\delta V = 0$. Поэтому из (2.76) следует $\delta\varepsilon = 0$, а поскольку любой термодинамический параметр плазмы можно выразить как функцию двух переменных — ε и V , то из $\delta\varepsilon = \delta V = 0$ вытекает, что все термодинамические параметры, в том числе давление p , на альвеновском разрыве непрерывны. Но тогда из (2.70) следует $\delta B_t^2 = 0$, т. е. магнитное поле постоянно по абсолютной величине (как в альвеновской простой волне). Однако $\delta B_t \neq 0$, т. е. может происходить поворот вектора магнитной индукции \mathbf{B} вокруг нормали к поверхности разрыва. Вращательные разрывы, так же как контактные и тангенциальные, многократно регистрировались в межпланетном пространстве.

Существование разрывов является естественным следствием уравнений бездиссипативной МГД. Разрывы могут возникать как результат эволюции первоначально «гладкого» МГД-возмущения (это было продемонстрировано в разд. 2.1), а также вследствие разрывных начальных и граничных условий. Последний случай реализуется, например, если покоившийся поршень мгновенно приводится в движение с некоторой конечной скоростью. В космических условиях роль «поршня» может играть мгновенный выброс плотного вещества при вспышке. Ввиду наличия диссипации (а также внутренних длин, характерных для бесстолкновительной плазмы, например, ларморовских радиусов частиц) фактически контактные, тангенциальные и вращательные «разрывы» имеют конечную толщину, нарастающую со временем [113]. Но толщина их часто весьма мала, и в области вне разрывов движение плазмы можно описывать уравнениями бездиссипативной МГД, сшивая решения на разрывах с помощью полученных выше граничных условий, связывающих МГД-параметры по обе стороны разрывов.

2.6. Ударные волны

Последний и самый важный тип МГД-разрывов — ударные волны. Это такие разрывы, у которых имеется поток вещества через разрыв ($j_n \neq 0$) и испытывают скачок плотность и удельный объем ($\delta V \neq 0$).

Теорема компланарности. Покажем, что геометрия ударной волны — плоская: существуют такие системы отсчета, в которых векторы $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ и нормаль к разрыву \mathbf{n} лежат в одной плоскости. Действительно при $B_n \neq 0$ из уравнений (2.71), (2.72) следует, что три вектора: $\delta\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{t1} - \mathbf{B}_{t2}$, $\delta(V\mathbf{B}_t) = V_1\mathbf{B}_{t1} - V_2\mathbf{B}_{t2}$, $\delta\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{t1} - \mathbf{u}_{t2}$ — взаимно параллельны (или антипараллельны). Поскольку $V_1 \neq V_2$, отсюда следует, что \mathbf{B}_{t1} и \mathbf{B}_{t2} параллельны, т. е. $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ и \mathbf{n} лежат в одной плоскости. Учитывая тот факт, что

$\text{div } \mathbf{u}_i$ лежит в этой же плоскости, выбором системы отсчета (такой, например, чтобы \mathbf{u}_1 лежала в нужной плоскости) нетрудно добиться того, чтобы и векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ по отдельности были ориентированы в этой плоскости.

При $B_n = 0$ имеем из (2.71), (2.72)

$$\mathbf{u}_{t1} = \mathbf{u}_{t2}, \quad V_1 \mathbf{B}_{t1} = V_2 \mathbf{B}_{t2}. \quad (2.77)$$

Это означает, что $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{n}$ лежат в одной плоскости, а ввиду непрерывности тангенциальной скорости можно обратить ее в нуль выбором системы отсчета. Следовательно, \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 будут направлены в этой системе вдоль нормали.

Ударная адиабата. Выведем из уравнений (2.69)—(2.72) условия на разрыве, специфические для МГД ударной волны. После ряда преобразований [113] получим уравнение *ударной адиабаты*, связывающее скачки различных величин на фронте МГД ударной волны:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2^{-1} (p_1 + p_2) (V_1 - V_2) + (16\pi)^{-1} (V_1 - V_2) (B_{t1} - B_{t2})^2 = 0. \quad (2.78)$$

Как уже отмечалось в разд. 2.1, в области резких градиентов МГД и термодинамических параметров плазмы (во фронте ударной волны) имеет место сильная диссипация энергии упорядоченного движения. Она приводит к нагреванию плазмы, прошедшей через фронт, и в силу второго закона термодинамики к росту энтропии:

$$s_2 > s_1, \quad (2.79)$$

где s_1, s_2 — удельные энтропии перед и за фронтом соответственно. Как можно показать [113], из (2.79) при дополнительных условиях

$$(\partial^2 V / \partial p^2)_s > 0, \quad (\partial V / \partial T)_p > 0 \quad (2.80)$$

следуют неравенства

$$p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad (2.81)$$

т. е. ударные волны являются волнами сжатия. Неравенства (2.80) не вытекают из термодинамических соображений, но они выполняются для известных в настоящее время сред.

Эволюционность ударных волн и направление изменения параметров в ударной волне. Разрыв, удовлетворяющий условиям (2.69)—(2.72), может оказаться неустойчивым. Поэтому выяснение возможности существования МГД ударных волн должно включать и исследование их на устойчивость. Устойчивость в обычном смысле требует, чтобы начальное малое возмущение не нарастало со временем и оставалось малым в течение конечного наперед заданного промежутка времени. Однако это требование можно несколько ослабить и рассмотреть условия, при которых малое начальное возмущение будет оставаться малым в течение достаточно малого временного интервала. Такие условия носят название условий эволюционности ударной волны. Они не совпадают с обычной ус-

тойчивостью, так как допускают нарастание возмущений со временем, например, по закону $\exp(\gamma t)$, $\gamma > 0$. При этом, однако, для конечных интервалов $\Delta t \ll \gamma^{-1}$ возмущение будет оставаться малым всюду в пространстве. Примером неэволюционного МГД-разрыва является такой разрыв, который распадается на два или несколько разрывов конечной величины. В этом случае возмущение в области, где разрывы разошлись, приобретает сразу конечную величину.

Исследование условий эволюционности ударных волн приводит к следующему выводу: МГД ударные волны имеют две области эволюционности:

$$u_{n1} \geq v_{f1}, \quad c_{An2} < u_{n2} < v_{f2}; \quad (2.82)$$

$$v_{s1} \leq u_{n1} < c_{An1}, \quad u_{n2} \leq v_{s2}. \quad (2.83)$$

Здесь $c_{An} = |B_n| (4\pi\rho)^{-1/2}$ — альвеновская скорость; v_f и v_s — скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн соответственно; u_n — нормальная компонента скорости среды в системе фронта.

Ударные волны, удовлетворяющие (2.82), называются быстрыми, при уменьшении силы (амплитуды) волны они переходят в быструю магнитозвуковую моду. Волны, удовлетворяющие условиям (2.83), называются медленными и переходят при ослаблении в медленную магнитозвуковую моду. Анализ [113] показывает, что в медленных МГД ударных волнах магнитное поле ослабляется ($B_{t2} < B_{t1}$), а в быстрых усиливается ($B_{t2} > B_{t1}$) при переходе через фронт.

Частные виды МГД ударных волн. В частных случаях уравнения, определяющие свойства ударных волн, упрощаются и позволяют провести более наглядный анализ. *Параллельной ударной волной* называется волна, у которой магнитное поле перед и за фронтом имеет только нормальную составляющую, т. е. $B_{t1} = B_{t2} = 0$. В этом случае в силу непрерывности B_n поле не испытывает скачка. Как следует из уравнения (2.71), тангенциальная компонента скорости u_t при этом непрерывна и можно обратиться в нуль выбором системы отсчета. В системе отсчета с $u_t = 0$ отсутствует также электрическое поле. Магнитное поле выпадает из системы (2.69)–(2.72), а ударная адиабата (2.78) превращается в адиабату Гюгонио для ударной волны в среде без магнитного поля:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + (p_1 + p_2)(V_1 - V_2)/2 = 0. \quad (2.84)$$

Запишем (2.84) в явном виде для идеального газа с постоянной теплоемкостью ($c_p/c_v = \gamma$). Поскольку в этом случае $\varepsilon = pV/(\gamma - 1)$ [112], то (2.84) преобразуется к виду

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)(p_2/p_1)}{\gamma + 1 + (\gamma - 1)(p_2/p_1)}. \quad (2.85)$$

Это соотношение позволяет определить скачок удельного объема (или плотности) по скачку давления. При $p_2 \rightarrow p_1$ (слабая ударная

$$\text{волна } V_2 \rightarrow V_1, \text{ а при } p_2 \gg p_1 \text{ (точнее, } p_2 \gg p_1 (\gamma + 1) (\gamma - 1)^{-1}) \\ (V_1/V_2)_{\max} \rightarrow (\gamma + 1)/(\gamma - 1). \quad (2.86)$$

В плазме, рассматриваемой как одноатомный идеальный газ ($\gamma = 5/3$), максимальная степень сжатия $(\rho_2/\rho_1)_{\max} = 4$.

Отсутствие влияния магнитного поля объясняется тем, что движение вещества происходит вдоль поля. Однако наличие поля приводит к тому, то при $c_{A1} > c_{s1}$ параллельная ударная волна неэволюционна в интервале скоростей

$$c_{A1} < u_1 < (4c_{A1}^2 - 3c_{s1}^2)^{1/2} \quad (2.87)$$

(при $\gamma = 5/3$). В этом интервале скоростей эволюционна так называемая волна включения, у которой $B_{t1} = 0, B_{t2} \neq 0$. Возможны также ударные волны выключения, у которых $B_{t1} \neq 0, B_{t2} = 0$.

Перпендикулярной ударной волной называется волна, у которой $B_n = 0$, т. е. поле перед и за фронтом параллельно поверхности разрыва. При этом, как уже упоминалось, существует система отсчета, в которой $u_t = 0$ — движение плазмы по обе стороны перпендикулярно фронту. В этой системе существует электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_1/c = -\mathbf{u}_2 \times \mathbf{V}_2/c, \quad (2.88)$$

одинаковое по обе стороны фронта и параллельное ему. Согласно (2.77) в такой волне магнитное поле пропорционально плотности:

$$B_2/B_1 = \rho_2/\rho_1. \quad (2.89)$$

Уравнение ударной адиабаты в этом случае опять сводится к уравнению Гюгонио (2.84), если переопределить внутреннюю энергию и давление: место p в (2.84) следует подставить полное давление

$$p_* = p + b^2/8\pi V^2, \quad (2.90)$$

а вместо ε — полную плотность внутренней энергии

$$\varepsilon_* = \varepsilon + b^2/8\pi V, \quad (2.91)$$

связанную с p_* соотношением $p_* = -(\partial\varepsilon_*/\partial V)_s$. Здесь $b = V_1 B_1 = V_2 B_2$ — величина, не изменяющаяся при переходе через фронт.

Для сильной поперечной ударной волны в идеальном газе ($\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1, p_2 \gg p_1$) ударная адиабата принимает вид

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{B_1^2}{4\pi p_2} \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)^3. \quad (2.92)$$

Отсюда следует, что предельное сжатие такое же, как и в отсутствие магнитного поля. Но при конечных значениях p_2 сжатие меньше за счет того, что часть энергии расходуется на усиление магнитного поля за фронтом.

Выше все расчеты проводились в предположении, что в ударной волне происходит переход энергии от направленного движения

в хаотическое при сохранении ее полной величины. Но могут быть такие физические процессы (высвечивание возбужденных атомов и ионов, убегание ускоренных частиц), которые приводят к оттоку энергии из области фронта, не связанному с нагревом среды за фронтом. Такие процессы приводят к уменьшению температуры за фронтом и к увеличению степени сжатия, а также степени усиления магнитного поля. Если температуру T_2 можно считать фиксированной, то расчет [92] дает для поперечной сильной ударной волны с высвечиванием

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{4\pi RT_2 \rho_1}{\mu B_1^2} + \left[\left(\frac{4\pi RT_2 \rho_1}{\mu B_1^2} \right)^2 + \frac{8\pi \rho_1 (u_2 - u_1)^2}{B_1^2} \right]^{1/2}, \quad (2.93)$$

где R — газовая постоянная; μ — средняя молекулярная масса среды. Сжатие неограниченно растет с ростом числа Маха.

2.7. Плазменные неустойчивости

Выше в этой главе мы рассмотрели некоторые типы линейных и нелинейных волн, пользуясь МГД-уравнениями. Но космическая среда — это плазма, и в ней, конечно, разыгрываются также и чисто плазменные явления, не описываемые в рамках МГД. Из огромного числа относящихся сюда вопросов рассмотрим кратко здесь только те, которые непосредственно относятся к физике токовых слоев.

Одно из типично плазменных явлений — взаимодействие частиц с волнами в плазме с редкими столкновениями. Одного аспекта этого явления — передачи энергии от волн частицам, затухания Ландау — мы уже касались в разд. 2.4. Если распределение частиц не максвелловское и в плазме существуют пучки (инверсная заселенность состояний частиц), то возможен обратный процесс — частицы будут передавать энергию волнам, раскачивая первоначально существовавшие («затравочные») колебания. Это явление называют *пучковой неустойчивостью*. Эти процессы во всем своем многообразии имеют большое значение в космической электродинамике. Мы, однако, ограничимся здесь только сводкой результатов, важных для физики токовых слоев.

Аномальные явления. Токовые скорости являются наиболее естественными примерами пучков в плазме, ибо они накладываются на максвелловское распределение частиц в виде некоторых максимумов. В обычных условиях, когда характерные размеры поля велики, токовые скорости u_d , как уже говорилось в разд. 1.6, малы. При уменьшении масштабов поля по тем или иным причинам, обсуждаемым ниже, т. е. при уменьшении L , отношение u_d/u_{Ti} согласно (1.134) растет. При достижении некоторого порога включаются микронеустойчивости. Наиболее низкий порог соответствует возбуждению нижнегибридной моды (LHDI):

$$u_d > u_{Ti} (m_e/m_i)^{1/4}. \quad (2.94)$$

Столкновения электронов с квазичастицами (взаимодействие с возникшими колебаниями) представляет собой аномальный процесс. Эффективная частота столкновений ν_{eff} для данного процесса оценивается по формуле [235]

$$\nu_{\text{eff}} = 2,4 (u_d/u_{T_i})^2 (\omega_e \omega_i)^{1/2}. \quad (2.95)$$

Данная микронеустойчивость довольно часто используется для описания магнитосферных аномальных явлений.

Электростатическая ионно-циклотронная (ЕС) неустойчивость возбуждается при более высоком пороге (по сравнению с (2.94')):

$$u_d > (1/3)u_{T_e} (T_i/T_e)^{3/2}. \quad (2.96)$$

Соответствующая частота столкновений имеет величину [114]

$$\nu_{\text{eff}} \approx 0,2\omega_i. \quad (2.97)$$

Тиринг-неустойчивость. Некоторые возбуждения в плазме являются аperiодическими, т. е. имеют $\text{Re } \omega = 0$. Такая мода может возбуждаться при малых токовых скоростях, далеких от порогов (2.94), (2.96), но с малым инкрементом $\gamma = \text{Im } \omega$. При уменьшении масштаба L , упомянутого в предыдущем подразделе, такая неустойчивость включается гораздо раньше, чем, например, LHDI, именно по причине низкого порога по токовой скорости.

Возбуждением такого рода является тиринг-неустойчивость. Последняя характерна для конфигурации типа, изображенной на рис. 1.1. При развитии неустойчивости силовые линии начинают пересоединяться. Плазма с полем движется в направлении к нейтральной линии (т. е. к оси z) со скоростью v_d . В узком слое происходит пересоединение силовых линий с выделением магнитных островов (см. ниже рис. 5.1, б, в). Выпишем инкремент неустойчивости:

$$\gamma_\alpha = \pi^{-1/2} k_z u_{T_\alpha} (1 - k_z L) (k_z L + \epsilon_\alpha^{1/2})^{-1} \epsilon_\alpha^{3/2} \approx \pi^{-1/2} \omega_\alpha \epsilon_\alpha^{5/2}, \quad (2.98)$$

$$\alpha = i, e, \quad \epsilon_i = r_i/L, \quad \epsilon_e = r_e/L.$$

Наибольший интерес представляет ионная ветвь ввиду стабилизации электронного тиринга весьма слабым поперечным полем (B_y -составляющей) [55]. Оценка (2.98) соответствует реальному случаю $k_z L \lesssim 1$.

Упомянутое выше пересоединение силовых линий также может быть описано в терминах аномальной проводимости. Действительно, движение плазмы к оси z происходит за время γ^{-1} , поэтому скорость v_d оценивается как $v_d \approx \gamma L$. Это движение с полем происходит почти во всей области. В узком слое в окрестности оси z вмороженность нарушается. Она нарушается внутри ларморовского радиуса, который из-за слабости поля в окрестности оси z больше своего характерного значения r_α . Легко сообразить, что здесь его величина δ такова: $\delta \approx r_\alpha \epsilon_\alpha^{-1/2} \approx L \epsilon_\alpha^{1/2}$. На границе слоя, где происходит диссипация, должно выполняться

$$v_d \approx \eta_{\text{eff}}/\delta. \quad (2.99)$$

Это соотношение означает, что поле, переносимое со скоростью v_d в границе слоя, диссипирует внутри него из-за эффективной диффузии (с коэффициентом η_{eff}). Подставляя в (2.99) $v_d = \gamma L$ и η_{eff} согласно (1.45), получим для электронной ветви и начального равновесия (1.137), (1.138):

$$\sigma_{\text{eff}} = \omega_p^2 / (4\pi k_z u_{Te}), \quad v_{\text{eff}} = k_z u_{Te} \quad (2.100)$$

(формула Сагдеева, ср. с (1.76), $k_z L \approx 1$). Для ионной ветви

$$v_{\text{eff}} = (m_i/m_e) k_z u_{Ti} = (m_i/m_e)^{1/2} k_z u_{Te}. \quad (2.101)$$

Выше тиринг-неустойчивость трактовалась как пример токовой (или пучковой) неустойчивости. Имеется другая трактовка [365]. При наличии токов функция распределения частиц становится анизотропной: имеется избранное направление, параллельное току. А анизотропная плазма неустойчива по отношению к возбуждению моды Вайбель—Фрида (при которой формируются магнитные острова, причем в отсутствие начального магнитного поля). Эта анизотропия естественная. Если же имеется дополнительная анизотропия, то происходит раскочка анизотропной тиринг-неустойчивости (АТН) [118]. Введем продольную T_{\parallel} и поперечную T_{\perp} (по отношению к магнитному полю) температуры и соответственно продольную u_{\parallel} и поперечную u_{\perp} токовые скорости. Тогда инкремент АТН записывается в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi^{-1/2} k_z u_{\parallel} \kappa, \quad \kappa \ll 1, \\ \gamma &= 2^{-1/2} k_z u_{\perp}, \quad \kappa \approx 1, \quad \kappa = (T_{\perp} - T_{\parallel}) / T_{\perp}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

При не малом параметре анизотропии $\kappa \lesssim 1$ инкремент можно оценить как

$$\gamma \approx k_z u_{Ti} \approx c_A / L. \quad (2.103)$$

Оценка выписана для ионной моды, электронная по-прежнему подавляется слабым поперечным полем (B_y -составляющей). Инкремент (2.103) является максимальным для данного круга задач.

Вернемся к конфигурации, показанной на рис. 1.1, при учете шира (т. е. $B_x \neq 0$). Если

$$b_x = B_x / B_z > \varepsilon_e^{1/2} (B_z), \quad (2.104)$$

т. е. радиус Лармора в нейтральном слое определяется уже B_x -составляющей, то инкремент (2.98) уменьшается (см. [251]):

$$\gamma = \pi^{-1/2} k_z u_{Te} (l_p / L)^2 b_x^{-1}. \quad (2.105)$$

Наконец, в столкновительной плазме тоже известна тиринг-неустойчивость с инкрементом [25]

$$\gamma = (c_A / L) L_m^{-n}, \quad (2.106)$$

где $0 < n < 1$, $n \approx 1/2$; L_m — число Лундквиста (см. (2.112)),

Стабилизация кинетических неустойчивостей. Выше (в разд. 2.4) мы уже обсуждали вопрос о бесстолкновительном затухании волн. Тем не менее возможны ситуации, когда условия малости затухания (2.55) нарушаются, а волны все же существуют. Пример — МГД-волны в солнечном ветре. Дело в том, что затухание волн оказывает обратное действие на функцию распределения f , в результате чего на ней образуется плато и затухание прекращается. Это есть квазилинейная релаксация. Если же амплитуда волны не мала, то происходит нелинейная релаксация. В частности, неустойчивости, играющие существенную роль в аномальных явлениях и дающие эффективные частоты ν_{eff} (2.95), (2.97), рассматриваются именно таким образом. Упомянутые выше МГД-волны в солнечном ветре обсуждаются в [160].

Что касается тиринг-неустойчивостей, то здесь не все ясно. Известны факторы, никак не связанные ни с квазилинейностью, ни с нелинейностью, которые полностью подавляют неустойчивость. Так, АТН, обладающая максимально возможным инкрементом (2.103), сравнительно легко стабилизируется B_x -составляющей. Стабилизация происходит, когда B_x -составляющая замагничивает ионы в нейтральном слое:

$$b_x = B_x/B_z > \varepsilon_i^{1/2} (B_z) \quad (2.107)$$

(ср. с (2.104) — условием замагниченности электронов B_x -полем).

При наличии движения со скоростью плазмы \tilde{v} вдоль нейтрального слоя, т. е. вдоль оси z (например, течение Паркера—Свита, см. разд. 6.4), происходит снос возмущений и в связи с этим конвективная стабилизация [25]. Ясно, что неустойчивость исчезнет, если

$$k_z \tilde{v} > \gamma. \quad (2.108)$$

Нелинейная стабилизация происходит на уровне, определяемом условием

$$\gamma < b\omega_I, \quad b = B'/B_z, \quad (2.109)$$

где B' — возмущенное поле.

С другой стороны, тиринг представляет собой моду с отрицательной энергией. Это означает, в частности, что всякие дополнительные резистивные потери, связанные с наличием микротурбулентности, возникшей по другим независимым причинам, или с наличием мелкомасштабных магнитных флуктуаций, приводят к увеличению инкремента, в результате чего стабилизация (2.109) не наступает. В ту же сторону действует и нелинейность. Если амплитуда b достаточно велика, а именно если

$$2b^{1/2} (k_z L)^{-1/2} > \varepsilon_i^{1/2} \quad (2.110)$$

(когда размер магнитного острова становится больше резистивной области $L\varepsilon_i^{1/2}$), неустойчивость уже не стабилизируется. Более того, она переходит во взрывную фазу [249]. Магнитные острова растут до размера $\sim L$, и плазменный слой полностью разрывается.

Макротурбулентность. Плазма в космических условиях находится в непрерывном движении, которое носит нерегулярный характер. Даже если имеется регулярное движение (например, дифференциальное вращение, солнечный ветер, аккреция), то на него накладываются пульсации. При таком движении скорость представляет собой случайное поле, ее величина и направление меняются хаотическим образом, но, как правило, существуют различные усредненные достаточно стабильные характеристики движения.

В земных условиях турбулентность также нередкое явление. Она возникает в атмосфере при достаточно сильном ветре, на поверхности моря из-за раскачки волн ветром, в реках на порогах и перекатах и даже в водопроводных трубах при достаточно большом расходе воды (в последнем случае обычно трубы начинают гудеть и вибрировать). В лабораторных условиях турбулентность создают специально с помощью решеток, поставленных перпендикулярно потоку газа или жидкости в трубе.

Распространенность турбулентности в космических условиях связана в первую очередь с тем, что число Рейнольдса Re (1.51) чудовищно велико вследствие огромных размеров большинства космических объектов. При $Re \gg 1$ движения неустойчивы, они распадаются на вихри, которые, в свою очередь, дробятся на более мелкие вихри, и т. д. Имеются и другие неустойчивости, например конвективная, вызывающая турбулентную конвекцию.

В последние годы обнаружено, что для развития турбулентности не обязательно наличие многих степеней свободы (странные аттракторы простых систем) и, кроме того, стохастичность проявляется в лагранжевых траекториях, даже если эйлерово поле скоростей достаточно регулярно (так называемая лагранжева турбулентность). Эти обобщения понятия турбулентности, конечно, расширяют возможности использования аппарата случайных процессов для объяснения и описания поведения плазмы в космических условиях.

Важнейшей особенностью турбулентности в космических условиях является наличие в ней случайных магнитных полей наряду со случайными движениями. Это связано с динамо-неустойчивостью, т. е. с возбуждением и усилением слабых начальных магнитных флуктуаций турбулентной средой. Вместе с тем турбулентность всегда сопровождается усиленной диссипацией энергии. Процесс усиления магнитного поля также сопровождается уменьшением его масштаба и в конечном счете диссипацией мелкомасштабных полей (хотя наличие динамо-неустойчивости означает, что скорость усиления поля все же преобладает над его диссипацией). Из-за дробления масштабов диссипирует и сама кинетическая энергия.

Сверхзвуковая турбулентность. При достаточно мощном источнике энерговыделения, когда скорость движения вещества превышает скорости распространения любых линейных возмущений в рассматриваемой среде (т. е. звуковую и альвеновскую ско-

рости), турбулентность вырождается в систему ударных фронтов и волн разрежения, которые существуют наряду со слабыми вихрями, слабыми звуковыми волнами и другими линейными модами. По-видимому, впервые представление о сверхзвуковой турбулентности ввел С. Б. Пикельнер в связи с анализом свойств старого остатка сверхновой Петля Лебеда. Теорию сверхзвуковой турбулентности развил Каплан [92], см. также [90].

Наряду с ударными волнами в сверхзвуковой МГД-турбулентности могут присутствовать МГД-разрывы других типов (см. разд. 2.5), а также различные типы нелинейных волн, например солитоны (о солитонах см. гл. 8). Турбулентность при дозвуковых скоростях, реализуемая в виде сильно взаимодействующих вихрей различных масштабов, и сверхзвуковую турбулентность ударных волн и других нелинейных образований естественно называть сильной турбулентностью.

Современные данные об ансамблях МГД ударных волн (сверхзвуковой турбулентности), в частности об их возможной роли в происхождении космических лучей, имеются в обзорах [11, 184]. По-видимому, сильные и слабые ударные волны играют большую роль в формировании турбулентности межзвездной среды. Обсуждение этих вопросов можно найти в работах [29, 216], а также в гл. 9, 10 настоящей книги.

Плазменная турбулентность. В плазме, находящейся в магнитном поле, могут генерироваться и длительное время существовать различные ветви плазменных колебаний: ленгмюровские и ионно-звуковые волны, альвеновские и магнитозвуковые волны, вистлеры и ряд других. Они могут генерироваться механическими движениями плазмы, пучками частиц, мощным радиоизлучением, токами в плазме, различными неустойчивостями. Ввиду случайного характера генерации, а также из-за нелинейных взаимодействий волны обычно имеют случайные фазы и образуют случайное волновое поле. Такие ансамбли слабых волн со случайными фазами называют плазменной турбулентностью (соответственно ленгмюровской, МГД и т. д. в зависимости от того, какие колебания преобладают). Турбулентность в этом случае называется слабой, поскольку ее основными элементами являются линейные плазменные моды, которые слабо взаимодействуют друг с другом за счет нелинейных эффектов.

Исследования межпланетной среды на космических аппаратах показали, что в межпланетной плазме существует МГД-турбулентность, образованная альвеновскими и быстрыми магнитозвуковыми волнами. В ней обнаружены и другие типы волн, в частности МГД ударные волны и разрывы. Наблюдательные и теоретические данные о турбулентности межпланетной среды можно найти в [161, 396], а также в разд. 9.5 настоящей книги.

2.9. Токовые слои

В разд. 1.2 отмечалось, что ввиду огромных размеров космических магнитных полей и высокой электропроводности плазмы они оказываются чрезвычайно консервативными. В частности, очень большое время изменения поля t_1 (1.79) характеризует их «инертность». Реальные поля, однако, меняются гораздо быстрее, генерируются и диссипируют за более короткие времена. Такую возможность дают им токовые слои.

Токовыми слоями (ТС) будем называть области плазмы с усиленным током или, что то же самое, поле, масштаб которого значительно меньше типичного, в котором происходит эффективная диссипация.

Толщину ТС будем обозначать δ , на этом масштабе меняется поле. Количественной характеристикой ТС может служить время диссипации поля в ТС: $t_\delta = \delta^2/\eta$ (ср. с (1.79)), которое можно сравнить с альвеновским:

$$t_A = L/c_A. \quad (2.111)$$

Если эти времена одинаковы, то

$$\delta = L/L_m^{1/2}, \quad L_m = c_A L/\eta, \quad (2.112)$$

где L_m — число Лундквиста. Если масштаб поля больше, чем δ по (2.112), то диссипация не является эффективной ни в какой области. Поэтому будем называть ТС — область плазмы, где характерный масштаб поля не больше δ по (2.112).

Число L_m обычно очень велико (например, для солнечной короны $L_m = 10^{11}$), поэтому величина δ оказывается малой. Как правило, она на много порядков меньше, чем толщина δ_p (1.140) — наименьший из фигурирующих до сих пор «макроскопических» размеров.

В бесстолкновительной плазме размер δ (2.112) смысла не имеет. Как мы видели в разд. 2.7, аномальные явления начинают проявляться при $u_d \approx u_{Ti}$, т. е. согласно (1.134), когда

$$\delta = r_i/\beta, \quad \beta \leq 1. \quad (2.113)$$

Для случаев $\beta \ll 1$ размер δ оказывается больше r_i . Для плазмы с $\beta \gg 1$ формула (2.113) дала бы размер, много меньший ларморовского радиуса. Это бессмысленно, поскольку задолго до того, как δ станет меньше r_i , нарушится вмороженность и само МГД-приближение станет недействительным. Условие $\beta \gg 1$ типично для плазмы поверхности и глубин Солнца и звезд, но там, однако, плазма столкновительна. Ввиду богатства возможностей и вариаций плазмы в космических условиях встречаются ситуации, когда $\beta \gg 1$, а плазма бесстолкновительна. В этом случае $\delta = r_i$, так как при этом становится весьма эффективной тиринг-неустойчивость (см. разд. 2.1). Мы, однако, не будем рассматривать этот случай.

В гл. 1 неоднократно подчеркивалось, что характерные размеры магнитных полей огромны и эти условия являются типичными.

Каким же образом образуются ТС? В определенном смысле формирование ТС — тривиальный и тоже «типичный» процесс. Он уже упомянут в разд. 1.4 и назван там «дроблением масштабов», но именно «в определенном смысле». Вынужденное формирование ТС более или менее очевидно: имеются какие-нибудь внешние силы, сближающие магнитные поля противоположных знаков. Другой способ формирования ТС — самопроизвольный, спонтанный. Он более интересен и важен для приложений. При этом ТС образуется за счет электромагнитных сил. Иначе говоря, магнитные поля устроены таким образом, что пондеромоторные силы стремятся сблизить поля противоположных знаков. Природа спонтанного формирования ТС содержит много «подводных камней», им будет посвящен специальный раздел (разд. 5.1). В настоящем разделе, рассматриваемом нами как вводный к проблеме ТС, будет проиллюстрировано вынужденное формирование ТС.

Для этого воспользуемся кинематическим подходом, т. е. движение будем считать заданным. При этом можно понять, не *почему* формируется ТС, а *как* он формируется. Движение задается «от руки», т. е. оно предполагается таким, какое нужно для каких-то целей. Именно поэтому можно говорить о вынужденном формировании ТС: силы, приводящие плазму в движение, не обсуждаются.

Оказывается, однако, что практически любое движение приводит к уменьшению масштабов (т. е. к формированию ТС) практически любого поля! Об этом подробнее будет говориться в гл. 3. Здесь мы приведем три примера течений, простота которых может убедить в справедливости данного утверждения. Рассмотрим поле, изображенное на рис. 1.1

Пример I. Пусть имеется течение в плоскости xy

$$\mathbf{u} = \{\omega_0 x, -\omega_0 y, 0\}, \quad \omega_0 > 0. \quad (2.114)$$

Тогда динамика поля описывается (1.126) с заменой B_x на B_z :

$$B_z = B_z^{(0)} (y \exp \omega_0 t), \quad (2.115)$$

где $B_z^{(0)}$ — начальное поле. Очевидно, что (2.115) соответствует полю рис. 1.1, только масштаб его (характерная длина, на которой поле меняется в y -направлении) уменьшается экспоненциально со временем. Поля противоположных знаков сближаются в окрестности $y = 0$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не вступит в действие омическое затухание, т. е. когда следует учесть диссипационный член в (1.45): $\eta \Delta B_z$. Приравнявая его к конвективному члену $\mathbf{u} \nabla B_z$ в (1.126), получим оценку установившегося масштаба δ_v . Итак,

$$u_y \partial_y B_z \approx \eta \partial_y \partial_y B_z, \quad \omega_0 \delta_v (B_z^{(0)} / \delta_v) = \eta B_z^{(0)} / \delta_v^2, \quad (2.116)$$

$$\delta_v = (\eta / \omega_0)^{1/2} = l \operatorname{Re} m^{-1/2},$$

(см. определение (1.78) и (1.63)). Если теперь $u (= \omega_0 l) \geq c_A$ и $l \approx L$, то толщина δ_v не превышает δ согласно (2.112), следовательно, ТС сформирован.

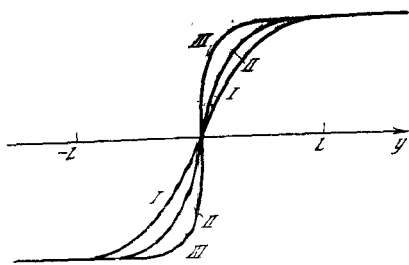


Рис. 2.3. Формирование ТС: профиль магнитного поля с течением времени (последовательно I, II, III)

Пример II. Пусть теперь течение (2.114) происходит в плоскости yz :

$$\mathbf{u} = \{0, -\omega_0 y, \omega_0 z\}. \quad (2.117)$$

Тогда согласно (1.130)

$$\begin{aligned} A_x &= A_x^{(0)}(y \exp \omega_0 t), \\ B_z &= -\partial_y A_x = \\ &= B_z^{(0)}(y \exp \omega_0 t) \exp \omega_0 t. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Таким образом, кроме экспоненциального уменьшения масштаба, как в (2.116), здесь происходит экспоненциальный рост напряженности поля до тех пор, пока масштаб не сравнится с δ_v (2.116).

Пример III. Хотя речь идет о кинематическом подходе, при котором обратное действие поля на движение не учитывается и для которого экспоненциальный рост поля в примере II не представляет трудности, полезно все же теперь построить пример отсутствия роста поля. Поскольку, однако, (2.117) можно рассматривать как разложение в ряд Тэйлора в точке $y = z = 0$ любого несжимаемого течения в плоскости yz , можно утверждать, что любое стационарное движение вызывает рост поля. Большое значение поэтому имеет нестационарное течение

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{0, u_y(y), -z \partial_y u_y(y)\}, \\ u_y &= \omega_0 \exp(-\omega_0 t) L \operatorname{cth} [(y/L) \exp(\omega_0 t)] \times \\ &\times \ln \operatorname{ch} [(y/L) \exp(\omega_0 t)] - y \omega_0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Для этого движения лагранжева траектория имеет вид

$$y = L \exp(-\omega_0 t) \operatorname{arch} (\operatorname{ch} a/L) \exp(\omega_0 t)$$

(a — начальное положение жидкой частицы). Течение (2.119) «приспособлено» под течение Харриса (1.139):

$$\begin{aligned} A_x &= -LB_\infty \ln \operatorname{ch} [a(x, t)/L] = \\ &= -LB_\infty \exp(-\omega_0 t) \ln \operatorname{ch} [(y/L) \exp(\omega_0 t)], \\ B_z &= B_\infty \operatorname{th} [(y/L) \exp \omega_0 t]. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Распределение профиля поля B_z для разных моментов времени изображено на рис. 2.3. Видно, что происходит укрупнение профиля, т. е. что ТС формируется. В то же время средняя напряженность поля не растет. Причем, как видно из (2.120), масштаб поля, будучи в начальный момент равным L , уменьшается $\sim \exp(-\omega_0 t)$ и при $t \rightarrow \infty$ обратится в нуль, т. е. при $y = 0$ должен появиться скачок поля B_z .

Таким образом, мы проследили кинематику формирования разрыва (или ТС). Движение задано, что считается оправданным,

если

$$M_A = u/c_A \gg 1, \quad \rho u^2/2 \gg B^2/8\pi; \quad (2.121)$$

здесь M_A — альвеновское число Маха. Кинематическое приближение называют *приближением слабого поля* в отличие от *приближения сильного поля* (терминология С. И. Сыроватского). В последнем случае выполняется обратное неравенство (2.121) и, что более важно, $\beta \ll 1$. Иначе говоря, c_A велика не только по сравнению с u , но и по сравнению со скоростью звука c_s . В приближении сильного поля именно поперечная сила и приводит в действие течение типа (2.114), (2.117), (2.119), поэтому формирование ТС можно назвать спонтанным.

Глава 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОГО ПОЛЯ И КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ДИНАМО

3.1. Уменьшение масштаба поля

В гл. 1 неоднократно говорилось о больших масштабах магнитных полей как о типичном явлении для космической плазмы. Отсюда начинается вся специфика космического поля, в частности, замороженность. Это в действительности грубая картина, которую мы дали в первом приближении. В следующем приближении на крупномасштабное поле накладываются малые области резких градиентов поля, т. е. ТС, а также области повышенной напряженности поля (пики поля). Именно им магнитные поля обязаны своей динамичностью, быстрой переменностью и, наконец, своим происхождением.

Возникновение ТС и пиков поля очень просто объясняется в кинематическом приближении (или в приближении слабого поля, как отмечалось в разд. 2.6). Очевидно, что если плазма с полем сжимается по тем или иным причинам, то масштаб поля будет уменьшаться. Пока нас будет интересовать менее тривиальный случай — несжимаемое движение. Уменьшение масштаба поля можно проиллюстрировать уже для плоского движения (в плоскости yz). Тогда согласно (1.115), (1.116) имеем решение

$$B_x = B_x^{(0)}(a(x, t)), \quad (3.1)$$

$$A_x = A_x^{(0)}(a(x, t)). \quad (3.2)$$

Обратимся сначала к B_x -составляющей. Согласно (3.1) и уравнению (1.126), решением которого является (3.1), движение просто переносит поле из одной точки в другую в плоскости yz . Иначе говоря, происходит перемешивание поля B_x , в результате чего сближаются поля различных напряженностей. Это и есть уменьшение масштаба.

Для несколько более строгого рассмотрения обратимся к простейшему примеру — движению типа сдвига: $u = \{0, u_y(z), 0\}$. Тогда

$$y = a_y + u_y(z)t, \quad z = a_z; \quad B_x = B_x^{(0)}(y - u_y(z)t, z). \quad (3.3)$$

Поле B_x переносится вдоль оси y , но со скоростью u_y , зависящей от координаты z . Сдвиг приводит к уменьшению масштаба. Действительно, производная $\partial_z B_x$ растет: $|\partial_z B_x| = |\partial_y B_x^{(0)} \partial_z u_y| t$. Все неоднородности вытягиваются относительно оси y и сжимаются в поперечном направлении. Согласно (3.3) процесс линеен по вре-

мени. Поэтому масштаб поля падает: $L(t) = L(0)/(1 + \omega_0 t)$, $\omega_0 \approx \approx d_z u_y$. За время

$$t_m = \frac{1}{\omega_0} \frac{L}{\delta_m} = \frac{l}{u} \widetilde{\text{Re}}_m^{1/2} \quad (3.4)$$

масштаб поля становится равным δ_m :

$$\delta_m = L \widetilde{\text{Re}}_m^{-1/2} \quad (3.5)$$

(ср. с (2.138) и (2.142), и омическая диссипация остановит процесс вытягивания неоднородности. После этого за короткое время $\delta_m^2/\eta = L/u = \tilde{t}_0$ (1.78) произойдет диссипация всего поля. Полное время процесса совпадает с t_m , которое в $\widetilde{\text{Re}}_m^{1/2}$ раз меньше обычного омического затухания t_1 . Таким образом, движение ускоряет диссипацию в $\widetilde{\text{Re}}_m^{1/2}$ раз.

Обобщением рассмотренного выше сдвигового движения является движение в окрестности O -точки (поля скорости). Например, дифференциальное вращение. В полярной системе координат (s, φ) , расположенной по-прежнему в плоскости yz , $u = \{0, u_\varphi(s)\}$, $u_\varphi(s) = \Omega(s)s$. Тогда имеем аналогично (3.3)

$$s = s^{(0)}, \quad \varphi = \Omega(s)t + \varphi^{(0)}, \quad B_x = B_x^{(0)}(s, \varphi - \Omega(s)t). \quad (3.6)$$

Масштаб уменьшается, как и выше, если вращение не твердотельное, т. е. Ω зависит от s . Неоднородности вытягиваются вдоль координаты φ за время t_m (3.4) и затем диссипируют. Этот механизм был привлечен в работе [380] для объяснения быстрой диссипации солнечных полей.

Пример (2.143) представляет собой движение в окрестности X -точки (поля скорости). При этом происходит экспоненциальное сближение жидкой частицы с осью z : $y = a_y \exp(-\omega_0 t)$ и

$$B_x = B_x^{(0)}(y \exp \omega_0 t, z \exp(-\omega_0 t)), \quad (3.7)$$

откуда видно, что масштаб по y падает экспоненциально до тех пор, пока не достигнет величины δ_v (2.142). Так, однако, происходит только в окрестности X -точки поля скорости, где формируется ТС и происходит диссипация поля B_x . Основная часть поля только переносится из одной точки в другую. Поэтому диссипация всего поля происходит за время (ср. с (3.4))

$$t_v = \frac{l}{u} \text{Re}_m^{1/2}. \quad (3.8)$$

Обратимся к полю в плоскости yz , определяемому компонентой A_x вектор-потенциала согласно (3.2) и (1.87). Она, конечно, ведет себя как B_x , см. (3.1). Поэтому уменьшение масштаба происходит, как и выше. Одновременно с этим усиливается поле. Например, для сдвига $A_x = A_x^{(0)}(y - u_y(z)t, z)$ (ср. с (3.3))

$$B_y \sim d_t u_y t = \omega_0 t. \quad (3.9)$$

Поле растет линейно со временем. Такой же (линейный) рост поля происходит при наличии O -точки: $A_x = A_x^{(0)}(s, \varphi - \Omega(s)t)$ (ср. с (3.6)), $B_\varphi \sim \partial_s \Omega t$. X -точка в поле скорости приводит как к экспоненциальному уменьшению масштаба, так и к экспоненциальному росту поля (см. (2.144)). Максимальная напряженность поля, т. е. пик поля, оценивается как

$$\max B = \widetilde{\text{Re}}_m^{1/2} B^{(0)}, \quad \max B = \text{Re}_m^{1/2} B^{(0)}; \quad (3.10)$$

здесь $B^{(0)}$ не только начальная напряженность, но и вообще характерная. Иначе говоря, таковой она является в основной области пространства. А в весьма малых областях пиков или ТС она принимает значения поля B по (3.10).

Мы рассматривали двумерное плоское движение. В трехмерном случае ситуация принципиально не меняется, т. е. присутствуют два эффекта: уменьшение масштаба и усиление поля (специфические эффекты см. ниже, в разд. 4.3). Следует подчеркнуть, что в рассмотренных случаях движение обладает масштабом l , который весьма велик. Магнитное поле в начальный момент тоже крупномасштабно (характерный размер $\sim L$). Движение плазмы перемещает поле, в результате чего в узких слоях возникают пики с резко усиленной напряженностью поля, а в других возникают ТС — слои с резкими градиентами. Конечно, следует оговориться, что, несмотря на распространенность данного процесса, он все же не является универсальным. Если поле не зависит от направления, параллельного вектору u , то уменьшения масштаба не происходит. Это видно, например, из выражения (3.3) при поле $B_x^{(0)}$, не зависящем от y , из (3.6), если $B_x^{(0)}$ не зависит от φ , а также в примерах дифференциального вращения: (1.96) — B не зависит от x и (1.97) — B не зависит от φ . Но для произвольного начального поля, вообще говоря, зависящего от этого направления (например, для поля, зависящего от φ при наличии дифференциального вращения (1.97)), уменьшение масштаба неизбежно.]

3.2. Постановка задачи кинематического динамо

Итак, утверждение о консервативности космических полей (см. разд. 1.2) нуждается в уточнении. Формула (1.79) дает огромное время существования поля. Его можно создать и уничтожить только за это время t_1 . Но это в неподвижной среде. Движущей плазме соответствует новая частота процесса ω_0 и сравнительно короткое время t_0 . Как видно из разд. 3.1, движение не просто переносит поле, как говорилось в разд. 1.2, а приводит к формированию ТС. В результате время существования поля сильно уменьшается и становится порядка t_v (3.8) или t_m (3.4).

Описанный процесс приводит к ускоренной диссипации поля. Существуют ли движения, усиливающие поле, поддерживающие его на стационарном уровне или меняющие его циклическим образом? Исследование этого вопроса является предметом теории динамо.

Динамо в космических условиях называют неограниченное усиление поля без внешних источников. Здесь сразу видно различие с динамо-машиной: в технике динамо с самовозбуждением (т. е. без внешних источников) не слишком глубоко отличается от генератора без самовозбуждения (т. е. с внешним источником — магнитом). Вообще, слово «динамо» взято, конечно, из техники, но космическое динамо не имеет почти ничего общего с техническим! Во-первых, в космосе нет обмоток и изоляторов. Поэтому космическое динамо иногда называют однородным. Во-вторых, что более важно, для космической плазмы характерна высокая индуктивность. Или иначе: числа Re_m , \widetilde{Re}_m огромны, в то время как для техники $Re_m, \widetilde{Re}_m < 1$. Это обстоятельство, на первый взгляд безобидное, в корне меняет все процессы усиления! Например, при вращении металлической рамки в магнитном поле она пересекает силовые линии и, следовательно, в ней возбуждается ЭДС. Но если сделать рамку размером с радиус Земли и вращать ее с угловой скоростью Земли, то число Re_m становится большим, поле вморожено в вещество и рамка не пересекает силовых линий внешнего поля.

Корректная постановка задачи динамо заключается в следующем. Рассматривается ограниченное проводящее тело и ищутся растущие решения уравнения (1.45) при заданном поле скорости u . Причем растущие решения понимаются в асимптотическом смысле: они должны вести себя таким образом при $t \rightarrow \infty$. По этой причине динамо называют иногда динамо-неустойчивостью: если растущее решение существует, то оно непременно будет реализоваться из начальных предельно слабых флуктуаций. Граничные условия соответствуют отсутствию источников на бесконечности:

$$V \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad V = O(x^{-3}). \quad (3.11)$$

Что касается проводимости, то обычно полагают, что она меняется скачком. Если вне проводящего тела вакуум ($\sigma = 0$), то на границе $\{V\} = 0$, а в вакууме $\text{rot } V = 0$, т. е. $V = \nabla\Phi$, причем на бесконечности выполняется (3.11). На границе со сверхпроводником следует принимать условие отсутствия поля в сверхпроводнике. Поскольку $\{V_n\} = 0$, $\{E_t\} = 0$ и $u_n = 0$, имеем

$$V_n = 0, \quad \text{rot}_t V = 0. \quad (3.12)$$

Моделью генерации поля в замкнутом объеме может служить динамо в периодическом поле скорости, если магнитное поле тоже периодически — с теми же периодами, что и движение. При этом, впрочем, игнорируются чисто граничные эффекты.

Антидинамо-теоремы. Выражение (1.45) представляет собой систему из трех уравнений для компонент поля с переменными коэффициентами. Общие методы решения отсутствуют. По этой причине первоначально исследователи попытались рассмотреть упрощенные модели, обладающие высокой симметрией. При этом был сразу доказан ряд антидинамо-теорем, накладывающих запрет на гене-

рацию поля при наличии определенной симметрии. Эти теоремы можно разделить на абсолютные и условные. Первые запрещают динамо при наличии определенных движений. Вторые накладывают запрет на генерацию полей определенной симметрии при заданных — тоже симметричных — движениях. Видна кардинальная разница между двумя типами теорем: абсолютные действительно говорят о том, что поле не растет, а условные малосодержательны. Ведь генерируемое поле вовсе не обязано обладать симметрией движений! И если несимметричное растущее решение существует, оно непременно реализуется как динамо-неустойчивость.

Наиболее содержательная антидинамо-теорема была доказана Эльзассером [242]. Было показано, что поле скорости

$$\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{e}_r \psi = \{0, u_\theta, u_\varphi\} \quad (3.13)$$

(\mathbf{e}_r — единичный радиальный вектор), если проводимость σ зависит только от r . В важном частном случае проводящее тело представляет собой шар (вне шара — вакуум). Действительно, уравнение для составляющей B_r системы (1.45) имеет вид

$$\partial_t B_r + \mathbf{u} \nabla B_r = \eta \left(\Delta + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{2}{r^2} \right) B_r \quad (3.14)$$

(η зависит только от r). Умножим (3.14) на $B_r r^2 / \eta$ и проинтегрируем по всему пространству:

$$d_t \int \frac{1}{\eta} B_r^2 r^2 dx = -2 \int (\nabla B_r)^2 \frac{1}{r^2} dx, \quad (3.15)$$

откуда следует, что $B_r \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. При $B_r = 0$ оставшиеся две компоненты B_θ , B_φ однозначно определяются A_r -компонентой вектор-потенциала:

$$\partial_t A_r + \mathbf{u} \nabla A_r = \eta (\Delta - r^{-2} \partial_r r \partial_r) A_r, \quad (3.16)$$

$$d_t \int A_r^2 dx = -2 \int \eta (\nabla A_r - (\mathbf{e} \nabla A_r) \mathbf{e})^2 dx.$$

Следовательно, $A_r \rightarrow 0$, а значит, и B_θ , $B_\varphi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Следует подчеркнуть, что, доказывая теорему, мы не пользовались предположением о симметрии поля \mathbf{B} . Следовательно, теорема абсолютная. Точно так же любое поле затухает, если

$$\mathbf{u} = \nabla \psi \quad (3.17)$$

(см. [35], а также обобщение [206]).

Несколько более узкий характер носит теорема о невозможности динамо при наличии движения:

$$\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{e}_x \psi = \{0, u_y(x, y, z), u_z(x, y, z)\} \quad (3.18)$$

(см. [80]). Эта теорема абсолютная, но справедлива при $\sigma = \sigma(x)$. Тем самым проводящая среда предполагается неограниченной в направлении, перпендикулярном оси x . Стоит только ввести зави-

симось от y, z , связанную хотя бы с ограниченностью любого небесного тела, как динамо становится возможным (см. разд. 3.5).

Все остальные известные антидинамо-теоремы условные. Так, теорема Каулинга [227] доказывается для осесимметричного магнитного поля (а движение $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, 0\}$).

3.3. Динамо-теории

Полудинамо. Добавим в правую часть (1.45) член $-c \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\text{ext}}$, где \mathbf{E}_{ext} — ЭДС внешних источников (типа термо-ЭДС). Они вызывают весьма слабое магнитное поле, которое называют затравочным, поскольку оно усиливается динамо-механизмами до наблюдаемых значений. Однако в условиях выполнения антидинамо-теоремы усиления не происходит. Зато может работать полудинамо [236]. При этом слабое затравочное поле усиливается движениями плазмы. Так, течение (2.143) усиливает поле в $\operatorname{Re} \frac{1}{2}$ раз. Это видно из второго выражения (3.10), где под $B^{(0)}$ на этот раз понимается напряженность затравочного поля. Дифференциальное вращение (1.97) усиливает поле в $\operatorname{Re} \frac{1}{2}$ раз, таким же образом действует топологическая накачка [327]. Конечно, если выключить внешние ЭДС, то поле диссипирует, но если они постоянно действуют, то поле будет постоянно существовать. В ряде случаев можно таким образом объяснить наблюдаемые магнитные поля в астрофизике.

Проблема собственных значений. Если движение стационарно, то система (1.45) допускает решения типа $\mathbf{V} \sim \exp(-Et)$ и

$$-E_m \mathbf{V}_m = \operatorname{rot} [\mathbf{u} \mathbf{V}_m] + \eta \Delta \mathbf{V}_m, \quad (3.19)$$

$$\operatorname{rot} [\mathbf{u} \mathbf{V}_m] = (\mathbf{V}_m \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{V}_m, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{V} = \sum_m \exp(-E_m t) \mathbf{V}_m(\mathbf{x}) a_m, \quad (3.21)$$

причем в разложении (3.21) под \mathbf{V}_m понимается не только собственные функции, но и присоединенные. Полнота системы собственных и присоединенных функций в общем случае не доказана: оператор (3.20) не сводится к эрмитовому. Впрочем, в проблеме динамо важно найти хотя бы одно решение с $\operatorname{Re} E_m \leq 0$. Это будет означать, что поле либо экспоненциально растет: $\operatorname{Re} E_m < 0$, либо осциллирует: $\operatorname{Re} E_m = 0$, $\operatorname{Im} E_m \neq 0$, или осуществляется стационарное динамо: $\operatorname{Re} E_m = 0$, $\operatorname{Im} E_m = 0$. Если для данного движения доказана абсолютная антидинамо-теорема, то $\operatorname{Re} E_m > 0$ для всех m , если условная, то $\operatorname{Re} E_m > 0$ для собственных функций \mathbf{V}_m , обладающих указанной симметрией.

В гл. 1 отмечалось, что числа $\operatorname{Re} E_m$, $\tilde{\operatorname{Re}} E_m \gg 1$, что связано с большими масштабами l и L . Масштаб собственной функции (3.19) не может быть столь велик, что для него $\tilde{\operatorname{Re}} E_m \gg 1$. В самом деле, будь это так, в (3.19) можно было бы пренебречь членом $\eta \Delta \mathbf{V}_m$ (т. е. омической диффузией), что изменило бы порядок системы уравнений. Физически невозможность пренебрежения

членом $\eta \Delta V_m$ связано с тем, что экспоненциальный рост поля в виде собственного решения (3.19) предполагает рост числа силовых линий, в то время как при отсутствии омического затухания имеется вмороженность, т. е. сохранение магнитного потока (1.119). Таким образом, мы приходим к хорошо известному утверждению, что динамо невозможно без включения диссипации.

Итак, начальное поле масштаба L должно подстроиться под собственную функцию V_m , т. е. должно произойти уменьшение масштаба поля, описанное в разд. 3.2. И только после этого может наступить генерация поля.

Инкремент нарастания поля $\gamma = \text{Re}(-E_m)$ оценивается как $\gamma = \omega_0 \text{Re}_m^{-b} = (u/l) \text{Re}_m^{-b}$, $0 \leq b \leq 1$. Если $b = 0$, то скорость процесса достигает максимальной частоты, возможной в данной проблеме. В этом случае динамо предложено считать быстрым. Если $b > 0$, то динамо медленное, наконец, при $b = 1$ инкремент минимален (см. [49]). Эта классификация, однако, оказалась не слишком конструктивной. Во-первых, до сих пор нет критериев быстрого динамо, во-вторых, весь процесс включает не только само экспоненциальное усиление, но и подстройку под собственную функцию. А последнее — уменьшение масштаба — может происходить за большое (по сравнению с ω_0^{-1}) время t_v (3.8).

3.4. Модели динамо

Построение модели динамо. Выражение (3.19) представляет собой систему уравнений с малым параметром η при старшей производной. Поэтому, казалось бы, в первую очередь следует разработать ВКБ-приближение. Однако до настоящего времени удалось построить теорию такого рода для случая, когда динамо отсутствует [35]. Вообще, из-за сложного вида оператора (3.20) не удастся выяснить ни необходимые, ни достаточные условия динамо. Впрочем, можно указать на одно необходимое условие: $\tilde{\text{Re}}_m \gg 1$. При каком критическом числе $\tilde{\text{Re}}_m$ начинается происходить усиление, в общем случае неизвестно. Для астрофизики этот вопрос не очень актуален ввиду того, что $\tilde{\text{Re}}_m \gg 1$ практически всегда. Выяснение критического числа $\tilde{\text{Re}}_m$ важно в геодинамо ввиду медленности движений в земном ядре. В связи с этим А. Гайлитисом [54] были разработаны модели с предельно низкими числами возбуждения.

Интересно, что динамо может работать и при $\text{Re}_m \ll 1$ (но обязательно $\tilde{\text{Re}}_m \gg 1$). Генерация осуществляется малыми ячейками размера l , потому и $\text{Re}_m \ll 1$. Это относится к турбулентному динамо, речь о котором ниже.

Перечислим основные методы построения динамо-моделей.

1. Численное нахождение собственных значений систем (3.19) или непосредственное численное решение системы (1.45) с определенными начальными данными. Метод применим, если $\tilde{\text{Re}}_m$ ненамного больше критического. Численный счет, однако, чрез-

вычайно труден. В частности, он давал растущие решения даже в тех случаях, для которых были впоследствии доказаны антидинамо-теоремы (см. [320]).

2. Расчет собственных значений для кусочно-непрерывного поля скорости u . На всех участках решение (3.19) известно, а на скачках проводится сшивка решений. Таким образом была построена первая модель: генерация проводится двумя твердотельно вращающимися шарами, погруженными в проводящую среду [267]. Этот же метод был использован для исследований винтовых движений — генераторов поля (см. [303, 140, 54]).

3. Генерация вращающимися цилиндрами бесконечно малого радиуса, так что $\omega = \sum_j A_j \delta(x - x_j)$ (роторное динамо, см. [104]).

4. Импульсная модель (см. разд. 3.5).

5. Почти симметричное динамо [20] с использованием малого параметра (слабое отклонение от симметрии, при которой работает антидинамо-теорема).

6. Турбулентное динамо — речь о нем пойдет ниже.

При построении динамо-модели обычно пользуются следующей методикой. Прежде всего следует убедиться в том, что для данной геометрии движения нет выделений одной из компонент поля с граничными условиями для нее, как было в (3.14). Если такое выделение происходит, то, как правило, можно доказать антидинамо-теорему, подобно (3.15), (3.16). Если растущее решение построено, необходимо провести по меньшей мере две проверки. Первая: при выключении скорости ($u = 0$) поле должно диссипировать, т. е. инкремент становится отрицательным. Обратное как раз и означает, что граничная задача поставлена некорректно и имеются источники поля. Вторая проверка: при $\eta = 0$ динамо отсутствует (см. разд. 3.3).

3.5. Успехи и трудности ламинарных динамо-моделей

Трудности математического характера (см. разд. 3.3) явились вызовом для многих исследователей, и динамо стало интенсивно изучаться по всем шести пунктам (см. предыдущий раздел). Наибольших успехов достигла теория турбулентного динамо (и не только сама теория, но и ее приложения для объяснения полей Солнца, звезд, планет Солнечной системы, Галактики) и почти симметричного динамо (в приложении к жидкому ядру Земли). При этом последняя теория весьма приблизилась к идеям турбулентного динамо, и, как нам кажется, именно этому обстоятельству она обязана своим успехом.

В этом разделе будем обсуждать ламинарное динамо. Прежде всего укажем на успехи теории.

1. Строго доказано наличие динамо для определенных моделей по методам 2, 3 (см. разд. 3.4);

2. Значительный прогресс достигнут в численных исследованиях. В настоящее время не приходится сомневаться в реальности

полученных растущих решений, т. е. трудности, о которых говорилось в предыдущем разделе, преодолены. Антидинамо-теоремы являются тестом для проверки счета. В счете достигнуты большие числа Re_m , вплоть до 1500 (см. [222, 361, 252]).

3. Разработаны достаточно простые импульсные модели.

Теперь перечислим трудности.

1. Необходимые и достаточные условия действия динамо неизвестны (если не принимать во внимание малосодержательные утверждения: «Необходимо, чтобы $Re_m \gg 1$ » или: «Необходимо, чтобы не выполнялись условия антидинамо-теорем» и т. п.).

2. Отсутствует модель быстрого ламинарного динамо. Критерии быстрого динамо неизвестны.

3. Критические числа Re_m^c (при $Re_m > Re_m^c$ начинается возбуждение) в общем случае неизвестны. Кроме того, неизвестно, при каких числах $Re_m(\infty)$ наступает асимптотический режим предельно больших Re_m (режим, осуществляемый в астрофизических условиях). Например, при решении с помощью метода ВКБ [35] выясняется, что асимптотический режим наступает при $Re_m^{1/2} \gg 1$. Это говорит о том, что $Re_m(\infty)$ — большое число, но неизвестно, какое именно. Во всяком случае, в численном счете асимптотический режим еще не достигнут. При $Re_m \gtrsim 1000$ по непонятной еще причине инкремент нарастания поля в определенных моделях начинает падать [252], т. е. асимптотическое поведение может наступить при $Re_m > 1000$.

4. Несмотря на то что динамо в космических условиях является однородным (см. разд. 3.2), ограниченность реальных небесных тел приводит к определенным граничным эффектам. В частности, максимумы поля и ТС, играющие фундаментальную роль в динамо (см. разд. 3.1, 3.3), могут формироваться на границах. Этот эффект, как правило, не учитывается в численном счете.

5. Во всех строго разработанных моделях отсутствует наглядная интерпретация механизма генерации. И возможно, поэтому нет конкретных приложений этих моделей к реальным космическим объектам.

6. Практически все динамо-модели являются кинематическими, т. е. не учитывается обратное действие магнитного поля на движение. Исключением являются работы [214, 230], в которых решается полная система МГД-уравнений с помощью разложений по собственным функциям диффузионного уравнения. При этом численный счет дает сходимость при сравнительно небольших Re_m , что соответствует условию ядра Земли.

Импульсная модель. Преимущество этой модели заключается в том, что два процесса: изменение поля, замороженного в движущуюся плазму, и диссипация поля — механически разделены. Это обстоятельство снимает большую часть трудностей предыдущих моделей. Данная модель предложена Паркером [329], строгое обоснование дано в [185] (см. также [38]).

В этой модели в моменты времени t_0, t_1, \dots, t_p происходит смена режима. В промежутках времени $t_0 < t < t_1, t_2 < t <$

$< t_3, \dots, t_{2m} < t < t_{2m+1}$ одинаковой длины t_u происходит движение вещества с $\text{Re}_m \gg 1$. В остальных (длиной t_η) движение выключено ($\text{Re}_m = 0$) и поле диссипирует. Движение выбирается таким, чтобы не происходило уменьшения масштаба поля (иначе появится необходимость учитывать диссипацию на этих интервалах). Как мы видели в разд. 3.1, такое движение вызывает линейный рост поля со временем (см. конец разд. 3.1). Поэтому за время t_u поле усилится в ωt_u раз: $B_1 = B_0 \omega t_u, \dots, B_{2m+1} = B_{2m} \omega t_u$ (B_{2m} — характерное значение поля при $t = t_{2m}$).

В период выключенной скорости происходит диссипация. Обозначим через $E_0, E_1, \dots, E_n, \dots$ собственные значения задачи (3.19) с $u = 0$, все $E_n > 0$ (что соответствует диссипации) и $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \leq \dots$. Если $t_\eta = N/E_0$, $N \gg 1$, то в конце этого интервала останется лишь нижняя гармоника, амплитуда остальных экспоненциально мала (поскольку амплитуда n -й гармоники затухает $\sim \exp(-E_n t_\eta)$). Нижняя гармоника тоже затухает, потребуем поэтому, чтобы ее конечная амплитуда все же превышала ее значение до процесса усиления во время импульса движения. Более конкретно, пусть она в e раз больше начальной, т. е. $B_{2m+2} = e B_{2m}$. Тогда

$$e B_{2m} = B_{2m+1} \exp(-E_0 t_\eta) = B_{2m+1} e^{-2}, \quad (3.22)$$

$$e = \omega t_u \exp(-E_0 t_\eta) = \omega t_u e^{-2}.$$

Таким образом, за каждые два промежутка времени от $t = t_{2m}$ до $t = t_{2m+2}$ напряженность поля возрастает в e раз. Это и есть генерация.

Модифицируем модель следующим образом. Пусть движение происходит непрерывно, а проводимость меняется со временем. В первых промежутках $t_{2m} < t < t_{2m+1}$ проводимость обычная, т. е. велика, так что $\text{Re}_m \gg 1$. А во время вторых промежутков $t_{2m+1} < t < t_{2m+2}$ проводимость очень мала, так что $\text{Re}_m \ll 1$. Тогда модель работает по-прежнему: при $t_{2m} < t < t_{2m+1}$ поле растет, при $t_{2m+1} < t < t_{2m+2}$ поле диссипирует. Причем ввиду низкой проводимости на втором этапе поле быстро диссипирует и условие (3.22) будет выполняться уже при достаточно коротких этапах диссипации: $t_\eta \ll t_u$. Можно сказать, что на очень короткие времена, импульсами, включается диссипация (т. е. резко падает проводимость), а обычное усиление происходит практически все время, т. е. за время t_u поле растет в e раз. Согласно (3.22) отсюда следует, что в целом поле растет экспоненциально с инкрементом

$$\gamma = \omega/e^3 \approx \omega/20,09 = 0,0498\omega. \quad (3.23)$$

Множитель e^{-3} при показателе экспоненты ω не зависит от Re_m , поэтому динамо быстрое, хотя и не предельно быстрое. Следует подчеркнуть, что движение, вызывающее динамо в импульсной модели, не обязательно должно генерировать поле, если движение или проводимость не зависят от времени. Импульсная модель толь-

ко указывает на возможность динамо этим же полем скорости, но уже стационарным.

Оказалось, однако, что именно благодаря импульсной модели удалось построить динамо, наиболее широко используемое в астрофизике! Подробнее об этом будет сказано в следующем подраздеде. В данный момент нам важно отметить, что с ее помощью удалось построить динамо для простейшего движения. Генерация поля осуществляется цилиндром, погруженным в проводящую жидкость, ограниченную в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Пусть ось цилиндра параллельна оси x . В [260] показано, что возбуждение наступает, если проводящая жидкость ограничена прямоугольником $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq b$ (плоскость yz). В [38] говорится о возможности динамо, если все проводящее тело представляет собой цилиндр, ось которого параллельна оси x и оси дифференциально вращающегося цилиндра, но сдвинута относительно нее (т. е. оси двух цилиндров параллельны, но не совпадают).

В этом примере движение простое и обладает высокой степенью симметрии: трансляционной ($\partial/\partial x = 0$) и осевой ($\partial/\partial \varphi = 0$), т. е. оно одномерное (зависимость только от расстояния до оси). Проводящая система обладает трансляционной симметрией ($\partial/\partial x = 0$), т. е. она двумерна. Генерация в такой простой системе оказывается возможной, так как генерируемое поле вовсе не обладает симметрией, т. е. соответствующие антидинамо-теоремы здесь лишь условные (см. разд. 3.2). Вообще надо сказать, что данная модель сводит на нет всю силу антидинамо-теорем и все соображения о том, каково должно быть движение, чтобы поле генерировалось, а также критерии быстрого динамо (скорость роста поля (3.23) всего в 20 раз меньше максимально возможной!). Можно поэтому предположить, что любое движение в ограниченной системе, не удовлетворяющее абсолютной антидинамо-теореме Эльзассера (3.13)—(3.16), вызывает динамо и притом быстрое!

Качественная трактовка динамо. Во всех качественных описаниях динамо два процесса: усиление поля, вмороженного в плазму, и диссипация — искусственно разделяются. Поэтому такие описания могут быть строго обоснованы в импульсной модели. Центральным моментом усиления поля является растяжение силовых трубок. Трубками называют объемы, ограниченные магнитными поверхностями (на которых расположены силовые линии).

Согласно (1.121) поле ведет себя как элемент жидкой длины ($\rho = \text{const}$). Расположим жидкую кривую внутри тонкой магнитной трубки. Тогда при удлинении трубки напряженность растет. Или иначе: при удлинении трубки ее поперечное сечение уменьшается (из-за сохранения количества вещества в трубке). Сохранение магнитного потока через поперечное сечение (см. (1.119)) приводит к росту напряженности поля. На рис. 3.1 изображена схема усиления поля. Главный этап — переход от

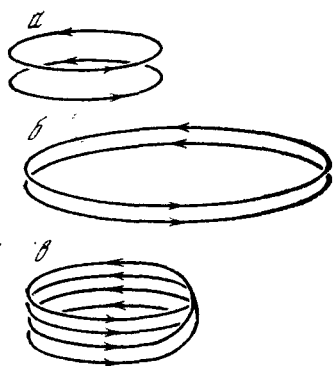
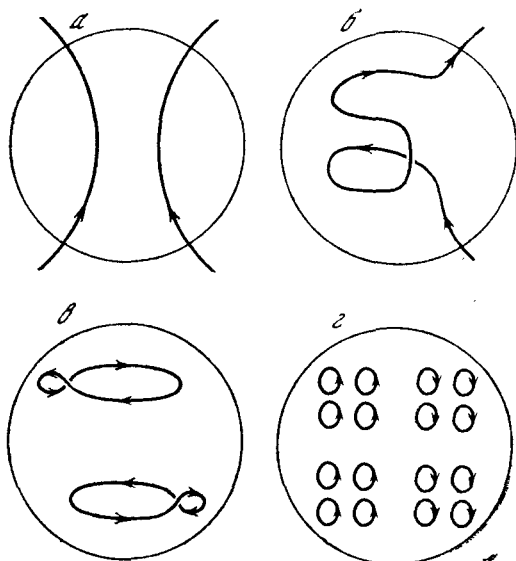


Рис. 3.1. Растяжение магнитной трубки

Рис. 3.2. Схема действия динамо



короткой трубки (рис. 3.1,а) к длинной (рис. 3.1,б), т. е. собственно растяжение магнитной трубки. Вторая трубка тоньше, силовые линии ближе друг к другу, т. е. поле усилилось. Следующая манипуляция (второй этап) с трубкой (рис. 3.1,в) делается для того, чтобы растяжение трубки внутри ограниченного тела можно было повторять. При этом трубка просто складывается вдвое. Но напряженность поля не меняется, поле просто переносится из правой части рисунка в левую (происходит перегиб трубки, а не растяжение!).

Если теперь, после второго этапа, включить эффективную диссипацию, то силовые линии в правой части рис. 3.1, в (где они идут «крест-накрест») пересоединятся (как на рис. 5.5, б, в, см. ниже). В результате поле станет таким же, как на рис. 3.1, а, только силовые линии в трубке-тороиде стали в два раза ближе, т. е. напряженность поля возросла в 2 раза. На рис. 3.1, б трубка занимает примерно весь объем тела, поэтому весь процесс регенерации можно начинать именно с него. Далее трубка складывается (см. рис. 3.1, в), происходит диссипация и конфигурация становится типа рис. 3.1, а, после чего трубка растягивается и все повторяется.

Интересно отметить, что на этапах усиления (без диссипации) напряженность поля растет не линейным образом, как в предыдущем подразделе, а удваивается. Поэтому множитель e^{-3} в (3.23) не должен появиться и инкремент становится максимально возможным: $\gamma = \omega$. Появляется сильное искушение считать, что в этой импульсной модели так и будет, но нельзя забывать, что здесь изложено все содержание модели, т. е. она разработана только «на пальцах». Если же движение, вызывающее эволюцию поля (см. рис. 3.1), и диссипация включаются не импульсами,

а действуют одновременно, то вся картина (и без того весьма качественная) полностью запутывается. Действительно, поля «крест-накрест» в правой части рис. 3.1, *в* уже не диссипируют. В процессе многочисленных повторений операций, изображенных на рис. 3.1, масштаб этих «лишних» полей не уменьшается, и они накапливаются.

Тем не менее именно качественная картина, притом основанная на импульсной модели [329], положена в основу современной теории динамо в астрофизике! Несмотря на то что эта модель представляет собой турбулентное динамо, нам удобно изложить ее здесь. Способ усиления поля похож на схему рис. 3.1. Первый (и главный!) этап — растяжение трубки, соответствующий переходу от короткой трубки к длинной (см. рис. 3.1, *а*, *б*), изображен на рис. 3.2, *а*, *б*. Из начального полоидального поля (рис. 3.2, *а* — изображены две силовые линии на меридиональном сечении небесного тела) дифференциальное вращение вытягивает тороидальное поле. Соответствующая эволюция одной силовой линии показана на рис. 3.2, *б*. То обстоятельство, что здесь всего одна силовая линия, упрощает рисунок, но не дает возможности непосредственно увидеть усиление поля (в отличие от рис. 3.1, где видно сближение двух силовых линий, что соответствует росту напряженности). Но факт усиления следует уже из того, что силовая линия удлинилась, или, иначе, произошло растяжение трубки. Если изобразить другие силовые линии, то картина получилась бы осесимметричной. Напомним, что аналитически усиление поля дифференциальным вращением давали выражения (1.97).

Следующий этап, эквивалентный описанному выше второму этапу (см. рис. 3.1, *в*), соответствует повороту на 90° магнитных петель, созданных конвективными движениями, возмущающими тороидальное поле. На рис. 3.2, *в* изображены две жидкие петли, возникшие из-за конвективного подъема и поворота по часовой стрелке — если смотреть «изнутри» звезды — в верхнем полушарии, и против часовой стрелки — в нижнем. В действительности таких петель много, и они усиливают начальное поле (см. рис. 3.2, *а*) так же, как петля на рис. 3.1, *в*. В этом можно убедиться с помощью рис. 3.2, *г*, на котором показаны меридиональное сечение и петля в его плоскости (на самом деле они все соединены с тороидальным полем, которое здесь не изображено). А усилиют эти петли начальное поле, когда включится диссипация. Петли начнут сливаться, все поля, кроме нижней гармоники, диссипируют. А последняя как раз и совпадает с полоидальным полем, представленным на рис. 3.2, *а*.

Если поворот петель на 90° произойдет в обратном направлении — в верхнем и нижнем полушариях — то новое полоидальное поле будет обладать знаком, противоположным начальному. В результате произойдет смена знака, т. е. цикл. Собственно, именно такая модель солнечного цикла была предложена Паркером [329]. К детализации этой модели мы вернемся в разд. 4.12.

Отметим, что усиленная диссипация, необходимая для работы импульсной модели, в данной качественной интерпретации обусловлена турбулентной диффузией. Тем самым турбулентность здесь привлечена дважды: она проявляется в множественности конвективных ячеек (и потому магнитных петель, см. рис. 3.2,г) и турбулентной диффузии. Как отмечалось в предыдущем подразделе, реальная неимпульсная диффузия не отделена от усиления поля, они действуют одновременно. Вообще, импульсная модель позволяет надеяться на то, что данное движение может служить генератором поля при небольшом числе Re_m , а само движение и диссипация действуют непрерывно. И для небесного тела эффективное число Re_m , основанное на турбулентном коэффициенте диффузии, действительно невелико. Но, повторяем, надежда есть, но будет ли генерация? Кроме этого, можно привести десятки других «подводных камней», контрдоводов, недоуменных вопросов по этой модели. Мы привели бы их, но этого делать не стоит, ибо данная модель была впоследствии обоснована в теории турбулентного динамо и казалась совершенно правильной! Можно только поражаться интуиции ее автора [329].

Глава 4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО

4.1. Основные сведения о турбулентности

Гидродинамическая турбулентность. Имеется несколько способов описания случайных процессов. Здесь мы упомянем один. Полное описание случайного поля дается моментами $M_1 = \langle u \rangle = U$, $M_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$, $M_{ijf} = \langle u_i u_j u_f \rangle$ и т. д. Здесь выписан момент первого, второго и третьего порядков. Чаще всего используются моменты невысокого порядка (ниже мы будем эффективно использовать моменты не выше четвертого порядка). Если усреднить уравнения в (1.49), то получится уравнение на M_1 , в которое входит второй момент (из-за нелинейности уравнения). Умножая i -ю компоненту (1.49) в точке 1x на u_j (2x) и усредняя, получим уравнение для второго момента M_{ij} , но уже выраженное через третий. Продолжая эту процедуру, получим незамкнутую цепочку уравнений. В интересующем нас случае $Re \gg 1$ в задаче отсутствует малый параметр, по которому эту цепочку можно было бы оборвать или осуществить законное замыкание.

Поэтому существующая теория турбулентности не может быть выведена регулярным образом. Приходится вводить дополнительные гипотезы и схемы. Так, в последнее время широко используется диффузионное приближение (в частности, схема Орсага [327]). Это приближение было разработано для турбулентности с $M_1 = \langle u \rangle = 0$, т. е. имеются лишь флуктуационные скорости. Тогда цепочка уравнений начинается с уравнения для второго момента, в которое входит третий. Диффузионное приближение предполагает замыкание на втором шаге, т. е. уравнение для третьего (а не второго) момента замыкается. Способы замыкания различны в разных подходах. К ним можно отнести приближение прямого взаимодействия Крейкнана, приближение случайных фаз Эдвардса [241], приближение самосогласованного поля [266] и модель с использованием уравнения Ланжевена—Фоккера—Планка [354] (см. также обзор [291]).

Нас будет интересовать вычисление первых моментов, т. е. выяснение динамики средней скорости $\langle u \rangle$ и среднего магнитного поля $\langle B \rangle$. В этом случае второй шаг, на котором по всем этим схемам происходит замыкание, соответствует уравнению для второго момента M_{ij} . При этом все приведенные выше приближения оказываются идентичными и сводятся к одному.

Крупномасштабная скорость является источником возмущения, сама турбулентность стремится избавиться от возмущения,

т. е. приводит к его релаксации за время τ . Символически запишем это утверждение в виде

$$\partial_t M'_{ij} = UM'_{ij}{}^{(0)} - M'_{ij}/\tau. \quad (4.1)$$

Здесь индекс (0) соответствует невозмущенному моменту; штрих — возмущению. В правой части (4.1) первый член — источник возмущения, второй член соответствует ε -приближению в кинетике. При $t \gg \tau$ из (4.1) следует стационарный уровень: $M'_{ij} = \tau UM'_{ij}{}^{(0)}$. Подставляя это выражение в уравнение для первого момента U , получим

$$\partial_t U = \tau UM'_{ij}{}^{(0)} + UU. \quad (4.2)$$

Свободная турбулентность (теория Колмогорова). Развитая свободная турбулентность характеризуется наличием большого числа вихрей разных масштабов. Крупные вихри распадаются на мелкие, мелкие — на более мелкие, и так до тех пор, пока не вступит в действие вязкость. Можно ожидать, что для не самых крупных вихрей, масштаб которых $l \ll l_0$ (l_0 — так называемый внешний масштаб турбулентности), в стационарной турбулентности устанавливается постоянный поток энергии ε от больших вихрей к меньшим. Эта область, для которой вязкость еще не существенна ($l > l_\nu$, l_ν — вязкий масштаб), несущественны также внешние условия ($l \ll l_0$), называется инерционной подобластью. В ней устанавливается универсальный режим:

$$E(k) = K\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}, \quad 1/l_0 < k < 1/l_\nu, \quad l_\nu = l_0 \text{Re}^{-3/4}, \quad (4.3)$$

где K — колмогоровская константа; $E(k)$ — спектр мощности турбулентных пульсаций; $\text{Re} = u(l_0)/\nu$ (ср. с (1.51)).

Постоянство потока связано, собственно говоря, с сохранением кинетической энергии: вся энергия распадающейся пульсации переходит в пульсацию меньшего размера. Скалярная примесь в несжимаемой жидкости ведет себя аналогичным образом: сохраняется «энергия» $\langle \theta^2 \rangle$ (см. (1.117), $n = 2$)

$$E_\theta(k) = K_\theta \varepsilon_\theta \varepsilon^{-1/3} k^{-5/3}; \quad (4.4)$$

здесь $E_\theta(k)$ — спектр мощности пульсаций примеси; K_θ — константа (которую тоже называют колмогоровской). Подобие спектров (4.3) и (4.4) не случайно: скалярная примесь следует за движениями жидкости, «следит» за ними.

Универсальный характер турбулентности в инерционной подобласти означает однородность и изотропность пульсаций. Второй момент — тензор M_{ij} записывается при этом в общем виде с использованием свойств симметрии (см. [127]). Нам потребуется одновременный ($t_1 = t_2$) корреляционный тензор соленоидально-го, т. е. несжимаемого, поля скорости:

$$M_{ij}(1\mathbf{x}, 2\mathbf{x}) = M_{LL}(r) r_i r_j r^{-2} + M_{NN}(r)(\delta_{ij} - r_i r_j r^{-2}); \quad (4.5)$$

$$M_{LL} = M_{LL}(0) - \bar{M}_\alpha r^\alpha, \quad M_{NN} = 1/2 r d_r r^2 M_{LL}; \quad (4.6)$$

$$M_{ij} = M_0 \delta_{ij} - M_\alpha r^\alpha \left(\delta_{ij} - \frac{\alpha}{2 + \alpha} r_i r_j r^{-2} \right),$$

$M_0, M_\alpha, \bar{M}_\alpha > 0$, $\alpha = 2$ при $r < l_\chi$, $\alpha = 2/3$ при $l_\chi < r < l_0$, $\mathbf{r} = {}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x}$.

Составим корреляционный тензор размерности коэффициента диффузии (т. е. $\sim u^2(l) \tau(l)$):

$$T_{ij} = T \delta_{ij} - T_\alpha r^\alpha \left(\delta_{ij} - \frac{\alpha}{2 + \alpha} r_i r_j r^{-2} \right), \quad (4.7)$$

$T, T_\alpha > 0$, $\alpha = 2$ при $r < l_\chi$, $\alpha = 4/3$ при $l_\chi < r < l_0$ — закон «четырех третей» Ричардсона. В более общем случае можно записать

$$T_{LL} = T - A_L r^\alpha, \quad T_{NN} = T - A_N r^\alpha, \quad (4.8)$$

$T, A_L, A_N > 0$, $\alpha = 2$ при $r < l_\chi$, $1 < \alpha \leq 2$ при $l_\chi < r < l_0$. Нижний предел для α соответствует требованию, чтобы энергия $u^2(l)$ была сосредоточена при $l = l_0$, а верхний — чтобы энергия полей $\text{rot } \mathbf{u}$ и $\text{div } \mathbf{u}$ была сосредоточена при $l = l_\chi$. Равенство $\alpha = 2$ соответствует быстрому убыванию спектра: все вихри размера $\sim l_0$ (маломодовая турбулентность). Из требования положительности корреляционных функций полей $\text{rot } \mathbf{u}$ и $\text{div } \mathbf{u}$ при $r \rightarrow 0$ следует

$$\frac{1}{\alpha - 1} \leq \frac{A_N}{A_L} \leq \frac{\alpha + 2}{2}. \quad (4.9)$$

Равенство на верхнем пределе соответствует условию $\text{div } \mathbf{u} = 0$, на нижнем — $\text{rot } \mathbf{u} = 0$.

4.2. Нетрадиционная турбулентность

Двумерная турбулентность. Критерии модификации обычной турбулентности в двумерную и подавление турбулентности внешним полем. Здесь мы дадим только «астрофизический» аспект проблемы. Подробнее об этом см. обзоры [32, 292, 119]. Кроме сохранения энергии, здесь еще происходит сохранение энтропии (1.128). Поэтому каскадный поток энергии (см. разд. 4.1) модифицируется, а именно происходит обратный поток энергии, т. е. поток к большим масштабам. Энтропия же переносится к малым масштабам. Это означает слияние мелких вихрей в более крупные, в результате чего происходит образование структур. Процесс аналогичен бозе-конденсации. По этой причине оказалось возможным описание его с помощью статистики Гиббса. Несмотря на методологические трудности [136], использование канонического описания оказалось полезным для выяснения направления переноса энергии, т. е. для решения вопроса, имеется ли обрат-

ный поток. Слияние вихрей аналогично слиянию магнитных островов, этот процесс будет обсуждаться в разд. 6.9.

Важным вопросом является критерий вырождения обычной турбулентности в двумерную. В астрофизических условиях двумерная турбулентность возникает в двух случаях. Во-первых, при быстром вращении, когда обратное число Россби велико:

$$Ro^{-1} = \Omega l / u, \quad Ro^{-1} \gg 1, \quad (4.10)$$

где Ω — угловая скорость вращения. В этом случае кориолисова сила навязывает конвективным ячейкам форму двумерных валов, параллельных Ω . Во-вторых, при наличии сильного магнитного поля. Остановимся на этом несколько подробнее.

Рассмотрим два случая вырождения турбулентности в двумерную при наложении сильного поля. В первом случае турбулентность возбуждается в полупространстве $x < 0$ (пример — солнечное пятно: ось x направлена вертикально, при $x < 0$ происходит возбуждение поля конвекцией). Возмущения распространяются в область $x > 0$ в виде МГД-волн. Движения в этой области можно считать двумерными, если длина волны больше характерных поперечных размеров l (в плоскости $x > 0$):

$$l < c_A / \omega, \quad (4.11)$$

$$u < c_A, \quad M_A < 1; \quad (4.12)$$

здесь ω — частота возмущения; u — характерная скорость движений при $x = 0$. Выражение (4.12) является другой формой записи (4.11), поскольку $u(x = 0) = l\omega$.

Во втором случае поле направлено горизонтально и турбулентность возбуждается в результате конвективной неустойчивости (пример — тороидальное поле в солнечной конвективной зоне). Обозначим через γ_0 инкремент возбуждения ячейки размера l при отсутствии магнитного поля. Поскольку эта ячейка распадается из-за нелинейного взаимодействия за время l/u , можно записать для установившегося уровня пульсаций

$$u = \gamma_0 l. \quad (4.13)$$

При наличии магнитного (квазиоднородного) поля дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = (c_A k)^2 - \gamma_0^2, \quad \gamma = \sqrt{\gamma_0^2 - (c_A k)^2}. \quad (4.14)$$

При $c_A = 0$ (поле отсутствует) $\omega = i\gamma_0$, т. е. имеет место абсолютная неустойчивость, конвекция возбуждается именно так. Из (4.14) видно, что магнитное поле уменьшает инкремент, инкремент обращается в нуль при $(c_A k)^2 = \gamma_0^2 = u^2/l^2$ (см. (4.13)). Учитывая, что $k \approx 1/l$, получаем: конвективная неустойчивость возникает при выполнении (4.12).

Обратим внимание на то, что согласно (4.14) поле перестает влиять на движение, когда $c_A k = 0$ или

$$Bk = 0. \quad (4.15)$$

Собственно, условие (4.15) означает возможность перестановок силовых линий без их деформации. Не случайно именно такое условие важно для перестановочной или желобковой неустойчивостей. Мы будем неоднократно возвращаться к этому обстоятельству (см. разд. 6.1—6.3). Однако конкретно для конвективной неустойчивости выполнение (4.15) ничего особенного не дает. Дело в том, что γ_0 тоже зависит от k . Наличие ненулевого инкремента γ_0 при выполнении (4.15) означало бы, что имеется неустойчивость, возбуждающая ячейки, размер которых вдоль поля B совпадает с размером всего Солнца! На самом же деле, конечно, $\gamma_0 = 0$ при выполнении (4.15). Итак, при выполнении критерия (4.12) в рассматриваемом случае турбулентность вообще не возбуждается. Или, иначе, наложение магнитного поля в виде силовой трубки такой интенсивности, что выполняется (4.12), где u — характерная скорость окружающей конвекции, приводит к тому, что все пульсации вырождаются в волны. И ввиду того что эти волны не поддерживаются внешними источниками, они, провзаимодействовав друг с другом, в конце концов диссипируют. Турбулентность подавляется.

Существует также понятие 2,5-мерной турбулентности (см., например, [322]). Здесь речь идет о поле (скорости и магнитном поле), зависящем от двух координат, но имеющем все три компоненты. Если уж двумерная турбулентность существует в природе, то 2,5-мерная тем более должна существовать.

Структуры. Допустим, в некоторой области пространства возник крупный вихрь, довольно вытянутый, так что его можно считать двумерным. Тогда он тоже будет распадаться на квазиоднородные вихри. Однако поток энергии в область малых масштабов уменьшается (по сравнению с изотропным случаем, см. разд. 4.1) или даже может изменить знак, т. е., как и в двумерной турбулентности, поток будет направлен в область больших масштабов. Если в данной области и имелась мелкомасштабная турбулентность, то она постепенно вырождается. Это, в свою очередь, приведет к уменьшению турбулентной вязкости, которая могла бы привести к диссипации! рассматриваемого крупного вихря. Итак, этот вихрь в конце концов подавит всю турбулентность и будет некоторое время существовать в виде когерентной структуры. Аналогично структура может возникнуть самопроизвольно как неустойчивость при случайном уменьшении потока ϵ в определенной пространственной области.

Кроме приведенных выше причин, на практике структуры возникают и вынужденным образом. Так, например, вертикальный размер вихря оказывается на много порядков меньше горизонтальных просто из-за наличия границ или тонкой зоны, где он развивается (гигантские ячейки на Солнце, движения в океа-

не). И турбулентность вынуждена быть квазиоднородной, вызывая обратный поток энергии, т. е. образование структур. Другая возможная причина — анизотропия турбулентности, приводящая к явлению отрицательной вязкости и тем самым к неустойчивости — росту крупных вихрей.

Переменяемость (см. [112, 128, 284]). Экспериментально переменяемость обнаружена довольно давно [188]. Она проявляется в том, что скорость сравнительно быстро меняется на коротких интервалах, как изображено (несколько утрированно) на рис. 4.1. Случайные функции на рис. 4.1, *a*, *б* содержат два характерных масштаба: l и δ , $l \gg \delta$. Их спектры могут быть неотличимыми и



Рис. 4.1. Пульсации скорости при наличии мелкомасштабных флуктуаций, но без переменяемости (*a*) и с переменяемостью (*б*)

имеют два максимума при $k = 1/l$ и $k = 1/\delta$. При этом диссипация (а значит, и поток энергии), осуществляемая на малых масштабах, происходит для функции, показанной на рис. 4.1, *a*, на всем промежутке, в то время как для функции, изображенной на рис. 4.1, *б* — только в области изломов.

Производная от функции на рис. 4.1, *б* содержит пики шириной δ , расстояние между пиками $\sim l$. Этот случайный процесс проще всего исследовать, определяя эксцесс

$$\Delta = \frac{\langle (\partial_1 u)^4 \rangle}{\langle (\partial_1 u)^2 \rangle^2} - 3. \quad (4.16)$$

Проводится измерение $\partial_1 u$ — производной от функции, представленной на рис. 4.1, *б* [188]. Для гауссова процесса $\Delta = 0$. Для процесса с резкими пиками $\langle (\partial_1 u)^2 \rangle \approx (u/\delta)^2 (\delta/l)$, $\langle (\partial_1 u)^4 \rangle \approx (u/\delta)^4 (\delta/l)$ и $\Delta = l/\delta \gg 1$ (одномерный процесс). В общем случае трехмерного поля

$$\Delta = (l/\delta)^n. \quad (4.17)$$

Если исследуемое поле представляет собой пики, сосредоточенные на поверхностях, то $n = 1$, если пики сосредоточены на кривых (тонкие нити), то $n = 2$, наконец, если в точках, то $n = 3$. Коротче, $n = 3 - D$, D — размерность пространства диссипации ($D = 2$ для поверхности, $D = 1$ для кривой, $D = 0$ для точки).

Физика явления переменяемости стала ясна благодаря работе [248]. Ситуация напоминает образование разрывов в газовой динамике. И действительно, функция на рис. 4.1, *б* напоминает пилообразный профиль после превращения акустической волны в ударную. Ансамбль акустических волн приведет к появлению поверхностей, расположенных случайным образом, на которых скорость меняется скачком. Аналогично и для вихревых движе-

ний. Вихрь не просто распадается на более мелкие вихри или сливается с другими, как говорилось выше, а, эволюционируя, образует разрывы. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к аналогии (1.123) между ω и \mathbf{V} . Согласно (2.141), (2.144) и результатам разд. 3.1, происходит уменьшение масштаба магнитного поля и его концентрация на поверхностях. Упомянутая аналогия говорит о том, что и ω (т. е. производная от скорости, как и говорилось выше) тоже начинает концентрироваться на поверхностях.

Выше говорилось о том, что спектры функций на рис. 4.1, *a* и *б* могут не отличаться. Но если считать, что колмогоровский спектр устанавливается только в областях диссипации, то новый спектр, полученный в результате усреднения по всем областям, будет содержать избыток энергии в больших масштабах (функция на рис. 4.1, *б* имеет больше ровных, т. е. крупномасштабных, участков, чем функция на рис. 4.1, *a*). Или, иначе, спектр пульсаций турбулентности с перемежаемостью более крутой. В частности, согласно [248], $E(k) = k\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}(kl_0)^{-\mu}$,

$$\mu = (3 - D)/3. \quad (4.18)$$

Если пространство диссипации трехмерно, $D = 3$ и $\mu = 0$. Если поле скорости имеет разрывы на поверхности, то $D = 2$, $\mu = 1/3$. Тогда

$$E(k) \sim k^{-2}, \quad (4.19)$$

что характерно для пилообразного профиля скорости ансамбля ударных волн (см. разд. 10.4). Для реальной турбулентности измерения давали величину $D = 2,5$, но затем выяснилось, что $D = 2,75$ (см. [323]). Кроме того, в другой модели в знаменателе (4.18) стоит не 3, а 9 [355]. Так или иначе, поправка к колмогоровскому спектру невелика!

Гиротропность (спиральность). Еще одно уточнение, касающееся характера свободной турбулентности, связано с отсутствием отражательной инвариантности. В простейшем изотропном случае к тензору (4.5), (4.7) следует добавить

$$C(r) \varepsilon_{ijf} r_f, \quad T_c(r) \varepsilon_{ijf} r_f \quad (4.20)$$

(см. [32]). Здесь C и T_c — псевдоскаляры. Легко понять, что при $C \neq 0$ ненулевой является спиральность

$$H = \langle \mathbf{u} \text{ rot } \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} \omega \rangle, \quad (4.21)$$

тоже, конечно, псевдоскаляр. Наличие в системе спиральности приведет к некоторому уменьшению потока ε в область малых масштабов, что, в свою очередь, приведет, как говорилось выше в настоящем разделе, к образованию когерентных структур [397].

В астрофизических условиях гиротропность возникает во вращающейся неоднородной среде в результате действия кориолисовой силы $\mathbf{F} = -2[\mathbf{u}\Omega]$. Умножим уравнение движения на ω и ус-

редним. Член с кориолисовой силой является источником, $\langle -2 \langle \omega [u\Omega] \rangle = 2 \langle [u\omega] \rangle \Omega$,

$$\langle [u\omega] \rangle = \langle [u \operatorname{rot} u] \rangle \sim \rho^{-1} \nabla \langle u^2 \rangle \rho, \quad (4.22)$$

$$\Omega \langle [u\omega] \rangle \sim (\Omega/\rho) \nabla \langle u^2 \rangle \rho.$$

Как и всякое возмущение, гиротропность диссипирует за время $\tau = l/u$ (см. разд. 4.1). Приравнивая источник (4.22) диссипации $\langle [u\omega] \rangle / \tau$, получим

$$H = \langle [u\omega] \rangle = \frac{l\Omega}{\rho u} \nabla \langle u^2 \rangle \rho. \quad (4.23)$$

Из (4.23) видно явно, что H — псевдоскаляр (поскольку Ω — псевдовектор). Корреляция $\langle [u \operatorname{rot} u] \rangle$ в (4.22) может быть получена регулярным образом в диффузионном приближении (см. разд. 4.1). Она представляет собой нечто вроде эффективного давления, оказываемого пульсациями скорости. Физический смысл гиротропности заключается в следующем. Рассмотрим вращающийся шар с убывающей по радиусу плотностью (Солнце или любая другая звезда). Поднимающийся (опускающийся) элемент конвективной ячейки расширяется (сжимается) со скоростью u_r , чтобы принять плотность окружающей плазмы. Легко сообразить, что кориолисова сила $-2 [u\Omega]$ приводит к повороту ячейки: в северном полушарии в одном направлении, в южном — в другом. Опускающаяся ячейка поворачивается в обратном направлении. В целом скорость подъема (опускания) u_r коррелирует с $\operatorname{rot} [u_r \Omega]$, т. е. с вихрем поворота ячейки. В результате в одном полушарии произойдет преобладание, скажем, правого винта над левым, в другом — левого над правым. Это видно и из формулы (4.23), меняющей знак при переходе через экватор.

Описанные явления аналогичны циклонам в земной атмосфере. В астрофизике данное явление стали использовать начиная с работы [386]. Повороты ячеек приводят к повороту замороженных в них магнитных петель — процессу, необходимому для работы солнечного цикла (см. конец разд. 3.5 и рис. 3.2).

Анизотропия турбулентности. В разд. 4.1 говорилось об изотропии свободной турбулентности. Это свойство нарушается, если возбуждение турбулентности происходит за счет явно неизотропных сил. Так, турбулентная конвекция обладает естественным избранным направлением — вертикальным. В неоднородной плотности конвективной зоне имеется избранный вектор $\sim \nabla \rho / \rho$ (тоже вертикальный). Кроме того, во вращающейся среде ячейки вытягиваются вдоль оси вращения. Тем самым направление, параллельное Ω , тоже избранное.

Анизотропия турбулентности приводит к двум важным явлениям. Первое — это отрицательная турбулентная вязкость (см., например, [139, 290]). Она получается в диффузионном приближении, о котором говорилось в разд. 4.1. Второе — перенос углового момента Ω , в результате чего возникает дифференциальное вращение (см. разд. 7.2).

Отрицательная вязкость эквивалентна обратному потоку энергии: в результате ее действия часть энергии мелкомасштабных вихрей передается к крупномасштабным. Поэтому она может являться одной из причин образования когерентных структур.

4.3. Новые представления о природе турбулентности

Странные аттракторы. Обычно турбулентность характеризуется большим числом возбужденных степеней свободы; в разд. 4.1 говорилось о множестве вихрей или, более того, о большом числе возбужденных фурье-гармоник. Сравнительно недавно выяснилось, что стохастичность может возникнуть и при небольшом числе степеней свободы (см. обзоры [126, 145]). Оказывается, нелинейное взаимодействие трех мод может привести к стохастичности.

В исследованиях такого рода рассматриваются усеченные уравнения, которые моделируют реальные уравнения в частных производных. Последние и отражают то обстоятельство, что реальная физическая задача характеризуется бесконечным (или очень большим) числом степеней свободы. Усеченные уравнения получают, в частности, оставляя несколько фурье-гармоник (галеркинских мод) или с помощью эвристических соображений, касающихся характера взаимодействия в данной системе.

Во многих работах моделируется таким образом случайное изменение знака магнитного поля Земли (см., например, [163, 356]). В физике Солнца (и теории конвекции) усеченные уравнения такого типа называют модальными. Сложное явление конвекции (с учетом магнитного поля, см., например, [302]) изучается как взаимодействие небольшого числа мод.

Лагранжева турбулентность. Если эйлерово поле скорости регулярно и имеет достаточно простой вид, то турбулентности как будто нет. В то же время траектории жидких частиц, а значит, лагранжевы скорости могут оказаться стохастичными. Это обстоятельство было проиллюстрировано на течении Бельтрами и названо лагранжевой турбулентностью [233]. Выпишем эйлерову скорость:

$$\{A \sin z + C \cos y, B \sin x + A \cos z, C \sin y + B \cos x\}, \quad (4.24)$$

где A, B, C — константы. Поле (4.24) периодически с периодом 2π . Хотя реальная траектория не ограничена внутри куба объемом $(2\pi)^3$, предполагается, что она замкнута: после попадания частицы на грань куба, например $x = 2\pi$, $0 \leq y \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq 2\pi$, считается, что она вновь возвращается на $x = 0$.

В трехмерном случае наглядное представление траектории дается с помощью сечения Пуанкаре: плоскость, на которую наносят точки пересечения траектории с данной плоскостью. В простейшем случае траектория проходит через одну и ту же точку на сечении Пуанкаре. В типичном — образуют кривую на этом сечении: в случае, когда сама траектория заполняет поверхность.

Наконец, траектория заполняет плотно часть сечения Пуанкаре: в этом случае траектория эргодична и заполняет часть пространства.

Движение (4.24) является частным случаем течения Бельтрами, для которого выполняется $\omega = \lambda u$. Это течение является стационарным, поскольку оно автоматически удовлетворяет уравнению движения (1.122) (с пренебрежимо малой вязкостью, $\tilde{\nu} \rightarrow 0$). Если λ — функция координат, то $u \nabla \lambda = 0$, т. е. траектория лежит на поверхности $\lambda(x) = \text{const}$, или, иначе, $\lambda(x) = \text{const}$ есть интеграл движения. Если же $\lambda = \text{const}$ всюду, что соответствует течению (4.24), то возможна эргодичность траектории.

Лагранжевы траектории как решения (1.103) аналогичны силовым линиям магнитного поля. Соответственно в условиях равновесия (1.84) силовые линии лежали на поверхностях $p = \text{const}$ (см. (1.85)), это и есть магнитные поверхности. Бессиловое поле (частный случай равновесия) удовлетворяет (1.91). Если $\alpha = \alpha(x)$, то поверхность $\alpha(x) = \text{const}$ есть магнитная поверхность (см. (1.92)). Если $\alpha = \text{const}$ в некоторой области пространства, то силовые линии там эргодичны. Стохастичность силовой линии магнитного поля имеет непосредственные физические следствия. Заряженная частица, двигаясь в основном вдоль силовой линии, легко диффундирует через область эргодичности, т. е. такое магнитное поле не способно удержать плазму.

Лагранжева турбулентность представляет самостоятельный интерес. Что касается ее способности к генерации магнитного поля, то, по-видимому, ничего особенного здесь ожидать не приходится. Во-первых, экспоненциальное удаление бесконечно близких частиц (а значит, и экспоненциальный рост поля) имеется уже при наличии простейшего двумерного движения (см. (2.143), (2.144)) без всякой стохастичности. Во-вторых, стохастичность траекторий для нестационарного поля скорости качественно отлична от появления эргодичности для стационарного эйлерова поля скорости. Стохастичность появляется при наличии уже довольно простого, но нестационарного эйлерова поля (в отличие от стационарного (4.24), см. разд. 4.8). Заметим, что реальная турбулентность всегда нестационарна (например, конвективные ячейки имеют конечное время жизни). Наконец, в-третьих, динамо, и в частности быстрое, осуществляется простыми движениями. Особой экзотики не требуется: см. разд. 3.5, где с помощью импульсной модели получена генерация для движения без стохастических траекторий. Турбулентное динамо тоже осуществляется движениями простейшей топологии (см. разд. 4.10). Например, для скорости

$$u = \{u_x(y, z), u_y(y, z), u_z(y, z)\}. \quad (4.25)$$

Стационарная турбулентность. В принципе можно сконструировать стационарное гидродинамическое решение в виде суммы стационарных решений типа (4.24), удовлетворяющих условию Бельтрами. Или, в более сложном случае, можно сконструиро-

вать стационарное решение в виде множества ячеек (см. ниже рис. 5.17). Наконец, в МГД известно решение (1.94), где u — произвольная функция — может быть и случайной. Существует ли в природе турбулентность одного из описанных видов, неизвестно.

В (1.94) скорость u параллельна V . Более общим является случай, когда u коррелирует с V , т. е. инвариант $K_\Delta \neq 0$ (см. (1.98)). При этом движения в поле, вообще говоря, нестационарны. В разд. 1.4 приводились доводы против существования такой ситуации и говорилось, что скорее всего $K_\Delta = 0$. Эти доводы, однако, не относятся к случаю, когда имеется внешнее однородное магнитное поле V_0 . При этом амплитуда МГД-волн (h и u) как раз обладает такой корреляцией. Так, для альвеновской волны $h \parallel u$, а амплитуды ускоренных и замедленных волн коррелируют, и $K_\Delta \sim \langle hu \rangle \sim kV_0$. Отсюда сразу видно: $K_\Delta \neq 0$ при наличии избранного направления распространения ансамбля волн. Если число волн, распространяющихся в положительном направлении V_0 (с $kV_0 > 0$) и в отрицательном ($kV_0 < 0$), одинаково, то $K_\Delta = 0$. Избранное направление распространения МГД-волн имеется в солнечном ветре (радиальное от Солнца). И действительно, корреляция K_Δ наблюдается в солнечном ветре [259, 260].

4.4. Лагранжево описание турбулентности

В отличие от основных проблем турбулентности, где приходится пользоваться приближенными схемами ввиду нелинейности уравнений (см. разд. 4.1), пассивные поля (скалярная примесь и слабое магнитное поле) описываются в точном виде благодаря лагранжеву подходу.

Функции распределения. Будем рассматривать стационарную (в статистическом смысле) турбулентность. Введем функцию $p_1(x, t | a, 0)$, $p_2({}^1x, {}^2x, t | {}^1a, {}^2a, 0)$, . . . , $p_n(\alpha x, t | \beta a, 0)$ — плотности вероятности того, что частица находится в точке x (1x , 2x и т. д.) в момент времени t при условии, что в момент $t = 0$ она находилась в точке a (1a , 2a и т. д.). Нам потребуются также обратные функции $\bar{p}_1(a, 0 | x, t)$, $\bar{p}_2({}^1a, {}^2a, 0 | {}^1x, {}^2x, t)$, . . . , $\bar{p}_n(\alpha a, 0 | \beta x, t)$ — плотности вероятности того, что частица находилась в точке a (1a , 2a и т. д.) при $t = 0$ при условии, что в момент t она придет в точку x (1x , 2x и т. д.). Выпишем основные свойства функций распределения. Прежде всего, нормировка

$$\int p_n d^n x = p_{n-1}, \quad \int p_2 d^2 x = p_1, \quad \int p_1 d^1 x = 1; \quad (4.26)$$

$$\int \bar{p}_n d^n a = \bar{p}_{n-1}, \quad \int \bar{p}_2 d^2 a = \bar{p}_1, \quad \int \bar{p}_1 d^1 a = 1. \quad (4.27)$$

В начальный момент точки 1x , 2x , . . . совпадают с 1a , 2a , То есть при $t = 0$ имеем

$$p_1 = \bar{p}_1 = \delta(x - a), \quad p_2 = \bar{p}_2 = \delta({}^1x - {}^1a) \delta({}^2x - {}^2a) \quad (4.28)$$

и т. д. Далее, если при $t = 0$ ${}^1a = {}^2a$, то мы фактически имеем дело с одной частицей. Следовательно, и конечное положение частиц должно совпадать. Это можно записать следующим образом:

$$p_2 \rightarrow p_1({}^1x, t | {}^1a, 0) \delta({}^2x - {}^1x) \quad (4.29)$$

при ${}^2a - {}^1a \rightarrow 0$. Аналогично для функции \bar{p}_2

$$\bar{p}_2 \rightarrow \bar{p}_1({}^1a, 0 | {}^1x, t) \delta({}^2a - {}^1a) \quad (4.30)$$

при ${}^2x - {}^1x \rightarrow 0$. Далекие частицы ведут себя независимо:

$$p_2 = p_1({}^1x | {}^1a) p_1({}^2x | {}^2a), \quad \bar{p}_2 = \bar{p}_1({}^1a | {}^1x) \bar{p}_1({}^2a | {}^2x) \quad (4.31)$$

при $|{}^1a - {}^2a| > l_0$, $|{}^1x - {}^2x| > l_0$. Здесь, как и в (4.9), l_0 — внешний масштаб турбулентности или корреляционная длина.

Связь функций p_n и \bar{p}_n со скалярной и энтропийной примесями (см. разд. 1.5). Согласно определению,

$$p_1 = \langle \delta(x - x(a, t)) \rangle, \quad (4.32)$$

$$p_2 = \langle \delta({}^1x - x({}^1a, t)) \delta({}^2x - x({}^2a, t)) \rangle,$$

$$\bar{p}_1 = \langle \delta(a - a(x, t)) \rangle,$$

$$\bar{p}_2 = \langle \delta({}^1a - a({}^1x, t)) \delta({}^2a - a({}^2x, t)) \rangle, \dots$$

(ср. с (1.112) и (1.109)). Поэтому согласно (1.107), (1.111), (1.112)

$$\tilde{\theta}(x, t) = \int \delta(z - a(x, t)) \tilde{\theta}^{(0)}(z) dz, \quad (4.33)$$

$$\theta(x, t) = \int \delta(z - a(x, t)) J \theta^{(0)}(z) dz = \int \delta(x - x(z, t)) \theta^{(0)}(z) dz;$$

$$\langle \tilde{\theta} \rangle = \int \bar{p}_1(z | x) \langle \tilde{\theta}^{(0)}(z) \rangle dz, \quad (4.34)$$

$$\langle \theta \rangle = \int p_1(x | z) \langle \theta^{(0)}(z) \rangle dz;$$

$$\tilde{\theta}_2 = \langle \tilde{\theta}({}^1x) \tilde{\theta}({}^2x) \rangle = \int \bar{p}_2({}^1z, {}^2z | {}^1x, {}^2x) \tilde{\theta}_2^{(0)}({}^1z, {}^2z) d{}^1z d{}^2z, \quad (4.35)$$

$$\theta_2 = \langle \theta({}^1x) \theta({}^2x) \rangle = \int p_2({}^1x, {}^2x | {}^1z, {}^2z) \theta_2^{(0)}({}^1z, {}^2z) d{}^1z d{}^2z.$$

При переходе от (4.33) к (4.34), представляющему собой просто усреднение, предполагается статистическая независимость начального распределения $\tilde{\theta}^{(0)}$, $\theta^{(0)}$ от последующего движения жидкости. Эта статистическая независимость действительно наступает при $t \gg \tau$, когда система «забывает» начальную статистику (τ — корреляционное время, или время памяти). Выражения (4.35) получены аналогично (4.34). Итак, уравнения (4.34), (4.35) имеет смысл рассматривать при $t \gg \tau$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением движений, не вызывающих пульсаций плотности. Для этого скорость должна удовлетворять обобщенному условию несжимаемости (1.39). Тогда плотность не является случайным полем и, следовательно, якобиан J тоже неслучайная величина (см. первую формулу (1.110)).

Поэтому

$$p_1 = \langle \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)) \rangle = \langle \delta(\mathbf{a} - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)) \rangle = \bar{p}_1 \rho(\mathbf{x}) / \rho(\mathbf{a}).$$

В частном случае $\rho = \text{const}$, т. е. ρ не зависит от координат, $\text{div } \mathbf{u} = 0$, $J = 1$ и

$$p_1 = \bar{p}_1, \quad p_2 = \bar{p}_2, \quad \dots, \quad p_n = \bar{p}_n. \quad (4.36)$$

4.5. Кинетические уравнения

Нам потребуются уравнения для функций распределения

$$\partial_t p_1 = \hat{L}_1 p_1, \quad \partial_t p_2 = \hat{L}_2 p_2, \quad \dots \quad (4.37)$$

и соответственно уравнение для $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots$. Операторы $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots$ могут быть представлены в виде, в котором они действуют на p_1, p_2 в момент времени t . То есть вся предыстория процесса входит в кинетические уравнения неявным образом: через начальные условия [345, 398]. В асимптотическом режиме $t \gg \tau$ операторы $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots$ не зависят от начальных положений жидких частиц, т. е. не зависят от \mathbf{a} . Возьмем производную по времени от (4.33), (4.34) и воспользуемся (4.37), тогда получим, что уравнение для p_1 совпадает с уравнением для $\langle \theta \rangle$ и другие аналогии, которые схематически можно изобразить так:

$$\langle \theta \rangle \leftrightarrow p_1, \quad \theta_2 \leftrightarrow p_2, \quad \theta_3 \leftrightarrow p_3, \quad \dots, \quad (4.38)$$

$$\langle \tilde{\theta} \rangle \leftrightarrow p_1, \quad \tilde{\theta}_2 \leftrightarrow \tilde{p}_2, \quad \tilde{\theta}_3 \leftrightarrow \tilde{p}_3, \quad \dots$$

Свойства функций распределения (4.26)—(4.30) накладывают ограничения на уравнения (4.37). Совпадения (4.38) указывают на то, что операторы $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \dots$ должны сохранять свойство корреляционных функций θ_2, θ_3 и т. д. при произвольных начальных данных. Уже это обстоятельство приводит к серьезным ограничениям. Оказывается, в частности, что операторы в (4.37) являются дифференциальными с производными не выше второго порядка. Доказательство этого утверждения довольно громоздкое: необходимо анализировать члены более высокого порядка — третьего, четвертого и т. д. и показать, что их вклад приводит к нефизическому поведению корреляционных функций [38].

К счастью, теперь уже нет необходимости в столь громоздком анализе. Попробуем прежде всего понять физический смысл дифференциального оператора уравнений (4.37). Напомним, что непрерывные марковские процессы описываются уравнением в частных производных Колмогорова—Фоккера—Планка (КФП), в то время как интегральное уравнение Больцмана или Колмогорова—Феллера соответствует скачкообразным процессам. Это связано с «локальностью» уравнений для скалярной и энтропийной примесей (1.104), (1.105), из которых в принципе могут быть получены уравнения для функций распределения. Под локальностью мы понимаем то, что значение $\theta(t)$ выражается через $\theta(t - \Delta t)$ (т. е.

θ в бесконечно близкий промежуток времени, $\Delta t \rightarrow 0$) и первые пространственные производные от θ тоже в момент $t - \Delta t$. Иначе говоря, $\theta(t, x)$ выражается через $\theta(t - \Delta t)$ в самой точке x и ее окрестности. Поэтому усредненные характеристики, т. е. функции распределения, в момент t тоже выражаются через свои значения в предыдущий момент и конечное число пространственных производных. Если же скорость и скалярная примесь испытывают скачки, то локальности нет и функция распределения, скажем $p_1(t, x | a)$, должна выражаться через значения $p_1(t - \Delta t)$ не только в окрестности точки x . И только интегральный оператор может связать $p_1(t - \Delta t)$ с далекими точками!

Все эти соображения, конечно, не связаны с тем, что процесс марковский и тем самым речь идет об уравнениях КФП. И действительно, обобщенные уравнения КФП (ОУКФП) тоже описывают непрерывные немарковские процессы. В частности, турбулентность представляет собой непрерывно дифференцируемое поле скорости и локальность применима.

Обратимся теперь к ОУКФП. Для этого изложим кратко результаты [345] (см. также [148, 168, 398, 42]), где были выведены эти уравнения. При этом повторим кое-что из сказанного выше.

1. Кинетическое уравнение может быть записано в форме (4.37), т. е. производные по времени не выше первого порядка, или операторы $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots$ содержат только пространственные производные.

2. Имеются две возможности: либо операторы $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots$ дифференциальные и содержат производные не выше второго порядка, либо они интегральные (или содержат бесконечное число производных). При этом непрерывные процессы описываются уравнениями в частных производных второго порядка (или ОУКФП); процессы, содержащие скачки, — интегральными уравнениями.

3. Если уравнение для p_1 ОУКФП, то уравнения для p_2, p_3, \dots тоже ОУКФП.

4. Кинетические коэффициенты обладают свойствами момента. В частности, коэффициент Λ_{ij} обладает свойствами корреляционного тензора.

Сделаем замечание по поводу п. 3. Обратимся к уравнению для p_1 в случае однородной турбулентности

$$\partial_t p_1 = D_T \Delta p_1 \quad (4.39)$$

с очевидным решением в виде одночастичного гауссового процесса. Таким образом, для однородной турбулентности п. 3 можно сформулировать несколько иначе. Если смещения частицы $\xi = x - a$ представляют собой нормальный процесс, то все кинетические уравнения для p_2, p_3, p_4, \dots типа ОУКФП.

4.6. Обобщенные уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка и теория турбулентности

Уравнения для $p_1, \tilde{p}_1, p_2, \tilde{p}_2$ в асимптотическом режиме [43, 142]. Комбинируя все требования, предъявляемые к операторам $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots$ (4.37), получим следующие кинетические уравнения:

$$\langle \tilde{\theta} \rangle : \partial_t \tilde{p}_1 + U_i \partial_i \tilde{p}_1 = \langle \tilde{u}_i \partial_i \tilde{u}_j \rangle \partial_j \tilde{p}_1; \quad (4.40)$$

$$\partial_t \langle \tilde{\theta} \rangle + (U_i + U_i^{(\tau)}) \partial_i \langle \tilde{\theta} \rangle = \partial_i \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \partial_j \langle \tilde{\theta} \rangle; \quad (4.41)$$

$$\langle \theta \rangle : \partial_t p_1 + \partial_i U_i p_1 = \partial_i \langle \tilde{u}_i \partial_j \tilde{u}_j \rangle p_1; \quad (4.42)$$

$$\partial_t \langle \theta \rangle + \partial_i (U_i + U_i^{(\tau)}) \langle \theta \rangle = \partial_i \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \partial_j \langle \theta \rangle; \quad (4.43)$$

$$U_i^{(\tau)} = - \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \rho^{-1} \partial_j \rho; \quad (4.44)$$

$$U_i^{(\tau)} = \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \rho^{-1} \partial_j \rho; \quad (4.45)$$

$$\tilde{\theta}_2 : \partial_t \tilde{p}_2 + U_i (\alpha x)^\alpha \partial_i \tilde{p}_2 = \langle \tilde{u}_i (\alpha x)^\alpha \partial_i \tilde{u}_j (\beta x)^\beta \rangle \partial_j \tilde{p}_2; \quad (4.46)$$

$$\theta_2 : \partial_t p_2 + \alpha \partial_i U_i (\alpha x) p_2 = \alpha \partial_i \langle \tilde{u}_i (\alpha x)^\beta \partial_j \tilde{u}_j (\beta x) \rangle p_2; \quad (4.47)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2;$$

здесь фигурирует тензор

$$T_{ij}(^1x, ^2x) = \langle \tilde{u}_i(^1x) \tilde{u}_j(^2x) \rangle, \quad (4.48)$$

представляющий собой кинетический (тензорный) коэффициент. Согласно разд. 4.5 он удовлетворяет свойствам корреляционного тензора, что и выписано в явном виде в (4.48). Здесь введено некое лагранжево поле $\tilde{u}(x)$, обладающее свойством

$$\operatorname{div} \rho \tilde{u} = 0. \quad (4.49)$$

Описание основных процессов с помощью ОУКФП. Уравнения (4.41), (4.43) (выписанные для примесей) записаны таким образом, чтобы левая часть совпадала по форме с усредненными уравнениями (1.104), (1.105). Правые части соответствуют турбулентной диффузии (вообще говоря, неоднородной и анизотропной). Кроме того, турбулентность вызывает перенос примесей: энтропийную со скоростью $\tilde{u}^{(\tau)}$ (и в изотропном случае $\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \sim \delta_{ij}$ антипараллельно градиенту плотности), а скалярную со скоростью $U^{(\tau)}$ (при $\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \sim \delta_{ij}$ параллельно $\nabla \rho$). В стационарном состоянии ($\partial_t = 0$) энтропийная примесь выравнивается: $\langle \tilde{\theta} \rangle = \text{const}$, а скалярная $\langle \theta \rangle \sim \rho$.

При $\nabla \rho = 0$ остается турбулентная диффузия. Особый интерес представляет выравнивание плотности примеси на границе турбулентной зоны. Пусть турбулентность возбуждена при $z > 0$. Тогда в окрестности $z = 0$ (e — единичный вектор в направлении z)

$$\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle = \langle \tilde{u}_2^2 \rangle \delta_{ij} + (\langle \tilde{u}_3^2 \rangle - \langle \tilde{u}_2^2 \rangle) e_i e_j. \quad (4.50)$$

Поток примеси через границу $z = 0$, конечно, отсутствует: $\langle \bar{u}_3^2 \rangle \partial_z \langle \theta \rangle = 0$, т. е.

$$\langle \bar{u}_3^2 \rangle \rightarrow 0, \quad \bar{u}_3 \sim z, \quad \langle \bar{u}_3^2 \rangle \sim z^2 \quad \text{при } z \rightarrow 0. \quad (4.51)$$

Поэтому для примеси $\langle \theta \rangle$, зависящей только от z , имеем

$$\partial_t \langle \theta \rangle = \partial_z T_2' z^2 \partial_z \langle \theta \rangle, \quad (4.52)$$

где T_2' — постоянная размерности частоты ω , представляющая собой обратное время поворота ячейки, $T_2' \approx \tau^{-1}$. Уравнение (4.52) описывает выравнивание примеси в окрестности $z = 0$ за время τ (этого и следовало ожидать из общих соображений). Отметим, что только ОУКФП естественно приводят к (4.52). Интегральные уравнения не дают такого. Это является одним из дополнительных доводов в пользу ОУКФП.

Перейдем к двухчастичной функции распределения. Ограничимся рассмотрением однородной и изотропной турбулентности и $\langle \mathbf{u} \rangle = 0$. Для этого случая тензор T_{ij} дан в (4.7). Рассмотрим случай малого расстояния между двумя частицами: $r = |^2x - ^1x| \ll \ll l_0$. При $r = 0$ возвращаемся согласно (4.43) к уравнению $p_1 (= \bar{p}_1)$, т. е. к (4.39), $D_T = T$. Умножим (4.39) на ξ^2 , проинтегрируем по 1x , тогда получим $\langle \xi^2 \rangle = 6D_T t$ — линейный рост квадрата смещения в результате случайных блужданий. Если же умножить (4.46) или (4.44) на r^2 и проинтегрировать по $^1x, ^2x$, то при очень малых r получим экспоненциальный рост расстояния между двумя частицами: $\langle r^2 \rangle \sim \exp(10T_2 t)$.

В важном частном случае однородной является не только турбулентность, но и скалярная примесь: $\langle \theta \rangle = 0$, $\theta_x = \theta_2(r)$. Перепишем уравнение (4.47) для $\theta_2(r)$:

$$1/2 \partial_t \theta_2 = (T \delta_{ij} - T_{ij}(r)) \partial_i \partial_j \theta_2, \quad \partial_i = \partial / \partial r_i. \quad (4.53)$$

При $r = 0$ из (4.53) следует $\theta_2(r = 0) = \langle \theta^2 \rangle = \text{const}$ (ср. с (1.117), $n = 2$). Нетрудно также показать, пользуясь (4.53), что

$$\langle (\nabla \theta)^2 \rangle = \langle (\nabla \theta)^2 \rangle |_{t=0} \exp 10T_2 t. \quad (4.54)$$

Экспоненциальный рост градиента примеси происходит с той же скоростью, что и удаление близких частиц. Однако здесь это означает нечто прямо противоположное: экспоненциальное уменьшение масштаба (или длины корреляции) скалярной примеси. Этот естественный результат получается с помощью ОУКФП и так же, как (4.52), не следует из интегрального уравнения для функции распределения (см. [398]).

Время жизни пульсации примеси масштаба l согласно (4.53) при $l > l_x$ (T_{ij} выписан в (4.7)) совпадает с $\tau(l) = l/u(l)$, что соответствует сказанному в разд. 4.1. Кроме того, если имеется крупномасштабный источник примеси ϵ_0 , то при учете молекулярной диффузии установится стационарный спектр пульсации. Можно показать, что в инерционной подобласти спектр совпадает с колмогоровским [38].

4.7. Многочастичные функции распределения и перемежаемость

Кинетические уравнения для $p_3, \tilde{p}_3, p_4, \tilde{p}_4, \dots$ Важнейшим преимуществом ОУКФП является возможность однозначного построения уравнений для многочастичных функций распределения с помощью двухчастичных. Дело в том, что согласно разд. 4.5 если кинетические уравнения для p_1, \tilde{p}_1 являются ОУКФП, то и уравнения для всех многочастичных распределений тоже типа ОУКФП. Это означает, что они второго порядка по пространственным производным.

Поэтому кинетические коэффициенты для многочастичных функций распределения могут зависеть только от положения двух частиц, т. е. они имеют вид $T_{ij}(1x, 2x), T_{ij}(1x, 3x), T_{ij}(2x, 3x)$ и т. д. Это следует из правил перехода от p_n к p_{n-1} согласно (4.26) и от \tilde{p}_n к \tilde{p}_{n-1} в силу (4.27). Если бы, например, имелся коэффициент типа $\Lambda_{ijf}(1x, 2x, 3x)$, то при интегрировании по $3x$ уравнение для p_3 не переходило бы в уравнение для p_2 . По этой же причине в многочастичных уравнениях будут фигурировать те же коэффициенты T_{ij} , что и в (4.46), (4.47). Таким образом, уравнения для \tilde{p}_n совпадают по форме с (4.46), а для p_n — с (4.47), только при этом $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$ [45].

Перемежаемость. Выше, в разд. 4.5, 4.6, отмечалось, что смещения одной частицы могут быть распределены нормальным образом, но функции распределения не являются гауссовыми. Гауссовы распределения не являются решениями уравнений (4.46), (4.47).

Физика негауссовой природы многочастичных функций распределения связана с перемежаемостью. Как говорилось в разд. 4.2, это явление определяется эксцессом: последний и характеризует отклонение от гауссова процесса. В настоящем разделе проиллюстрируем рост перемежаемости скалярной примеси в однородной турбулентности. Если в начальный момент примесь распределена однородным, «гладким» образом, то турбулентное перемешивание приведет к концентрации примеси на поверхностях, т. е. к перемежаемости. Выражение для эксцесса $\Delta = \langle \theta^4 \rangle / \langle \theta^2 \rangle^2 - 3$ (ср. с (4.16)) не является содержательным ввиду сохранения величин $\langle \theta^2 \rangle$ и $\langle \theta^4 \rangle$ (см. (1.117), $n = 2, 4$). По этой причине эксцесс сохраняется таким, каким он был в начальный момент. Процессу концентрации примеси на отдельных поверхностях отвечает рост эксцесса

$$\Delta = \frac{\langle (\nabla\theta)^4 \rangle}{\langle (\nabla\theta)^2 \rangle^2} - \frac{5}{3}. \quad (4.55)$$

Это выражение более удобно, чем (4.16). Слагаемое $5/3$ подобрано так, чтобы для гауссова процесса $\Delta = 0$.

Приступим к вычислению (4.55). Расчет величины

$$\langle (\nabla\theta)^4 \rangle = {}^1\partial_i {}^2\partial_i {}^3\partial_j {}^4\partial_j \theta_4 |_{1x=2x=3x=4x}$$

с помощью (4.46) (или (4.47)), $\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$, приводит к следующему результату:

$$\langle (\nabla \theta)^4 \rangle = \langle (\nabla \theta)^4 \rangle |_{t=0} \exp 28T_2 t. \quad (4.56)$$

Подставим (4.56) в (4.55) и учтем (4.54). Тогда получим

$$\Delta \sim \exp 8T_2 t. \quad (4.57)$$

Таким образом, эксцесс растет экспоненциально. Иначе говоря, первоначально гладкая примесь становится существенно негауссовой. Возникает и непрерывно растет перемежаемость.

4.8. Динамика магнитных полей. Быстрая диссипация

Как отмечалось в разд. 2.7 и гл. 3, движение приводит к уменьшению масштаба поля и его усилению. Если начальная напряженность поля низкая, так что обратным действием его на движение можно пренебречь, то уменьшение масштаба закончится включением омической диссипации. После этого поле будет либо слабо диссипировать, либо слабо генерироваться.

В турбулентной среде ситуация аналогична. Можно даже утверждать, что турбулентность упрощает рассмотрение: сравнительно легко избавиться от многих проблем и трудностей. Обратимся прежде всего к турбулентной диссипации магнитного поля. Проще всего рассматривать диссипацию при наличии двумерной турбулентности: движение происходит в плоскости yz (см. разд. 4.2). Рассмотрим магнитное поле, параллельное оси x : $\mathbf{B} = \{B_x(y, z), 0, 0\}$. Уравнение для B_x (1.126) совпадает с уравнением для скалярной примеси (1.104). Поэтому можно сразу воспользоваться результатами разд. 4.6 для описания диссипации B_x -составляющей.

Как уже говорилось в разд. 3.1, движение приводит к перемешиванию рассматриваемого поля (в виде прямых силовых линий, параллельных оси x). Пользуясь упомянутой выше аналогией и тем, что в однородном и изотропном двумерном случае $T_{ij} = T\delta_{ij} - T_2(r^2\delta_{ij} - 2r_i r_j/3)$ (ср. с (4.7)), получим с помощью (4.46)

$$d_t \langle B_x^2 \rangle = 0, \quad (4.58)$$

$$d_t (\nabla B_x)^2 = (16/3) T_2 (\nabla B_x)^2, \quad (4.59)$$

(ср. с (4.54)). Согласно (4.58), (4.59) происходит экспоненциальное уменьшение масштаба, или, иначе говоря, формируются хаотически расположенные ТС. За несколько времен поворота ячейки T_2^{-1} включится диссипация, и вместо (4.58) следует писать

$$d_t \langle B_x^2 \rangle = -\eta \langle \nabla B_x^2 \rangle, \quad (4.60)$$

т. е. диссипация закончится тоже за время T_2^{-1} . Таким образом, полное уничтожение поля в турбулентной среде происходит за

время нескольких поворотов ячеек. Эта ситуация сильно отличается от ламинарных движений. Как говорилось в разд. 3.1, диссипация там происходила за время t_m (3.4) или t_v (3.8), которое в $\text{Re}_m^{1/2}$ или $\text{Re}_m^{1/2}$ раз больше l/u — времени поворота ячейки. Согласно разд. 1.2 это самое короткое время в задаче. Таким образом, турбулентная диссипация гораздо более эффективная по сравнению с ламинарной и происходит за минимальные промежутки времени.

Обратимся теперь к полю $\mathbf{V} = \{0, B_y(y, z), B_z(y, z)\}$ при наличии двумерной турбулентности. На этот раз A_x -компонента ведет себя как энтропийная примесь (1.129). Отсюда сразу получаем

$$d_t \langle B_y^2 + B_z^2 \rangle = \frac{16}{3} T_2 \langle B_y^2 + B_z^2 \rangle - \eta \langle (\text{rot } \mathbf{V})^2 \rangle \quad (4.61)$$

(ср. с (4.59), (4.60)). Итак, при пренебрежении диссипацией, $\eta = 0$, поле растет экспоненциально. Имея в виду аналогию (1.121) между полем и элементом жидкой среды, это явление просто объясняется, ибо расстояние между частицами растет так же, как поле: $d_t \langle r^2 \rangle = (16/3) T_2 \langle r^2 \rangle$. Заметим, что из-за уменьшения масштаба диссипация станет в конце концов существенной и поле исчезнет.

Существенно, что турбулентная диффузия вызывается предельно простым эйлеровым полем скорости. Можно, например, представить скорость в виде простейшего «синусоидального» сдвига:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \exp(ikx) + \mathbf{u}^*(t) \exp(-ikx), \quad k\mathbf{u}(t) = 0. \quad (4.62)$$

Разобьем промежутки времени на интервалы длиной τ . На каждом интервале $\mathbf{u}(t) = \text{const}$, $\mathbf{k} = \text{const}$ и меняется скачком при переходе к следующему. Так что $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{k}(t)$ — случайные функции. В данной модели в каждый момент времени внутри каждого интервала движение одномерное (скорость зависит только от направления, параллельного \mathbf{k}). Поэтому внутри интервала движение сдвиговое и траектория зависит от времени линейно (как в (3.3)). В частности, имеет место линейный рост расстояния между частицами. А для усредненных траекторий рост экспоненциальный. Так же обстоит дело с уменьшением масштаба поля и его ростом: на каждом интервале масштаб линейно уменьшается, а величина $(B_y^2 + B_z^2)^{1/2}$ растет — тоже линейно со временем. В то же время усредненные характеристики меняются экспоненциально (см. (4.59), (4.61)). Во всех утверждениях, касающихся модели (4.62), можно без труда убедиться не только с помощью (4.58), (4.61), но и непосредственно. Дело в том, что эта модель точно решаемая (поскольку движение одномерное). Простой пример (4.61) показывает, что стохастичность траекторий при нестационарном турбулентном движении возникает уже в простейшем случае в отличие от лагранжевой турбулентности (см. разд. 4.3).

4.9. Уравнения для магнитных полей

Аналогия со скалярной и энтропийной примесями применима только в частном случае двумерной турбулентности. В общем случае кинематического приближения (т. е. для слабых полей, когда обратным действием поля на движение можно пренебречь) необходимо пользоваться точными уравнениями.

Здесь мы только выпишем уравнения, оставляя всю физику для дальнейших разделов. Для этого воспользуемся точным решением (1.116) для вектор-потенциала: оно удобнее решения (1.115), так как не содержит якобиан J . Запишем его в виде

$$A_i(\mathbf{x}, t) = \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} \partial_i' \int dz dz' z_j' \delta(z' - a(\mathbf{x}', t)) \delta(\mathbf{z} - a(\mathbf{x}, t)) A_j(\mathbf{z}, 0). \quad (4.63)$$

Выражение (4.63) можно усреднить непосредственно. Тогда, предполагая статистическую независимость начального $A_j(\mathbf{z}, 0)$ от будущих траекторий (как при выводе уравнения для примесей (4.46), (4.47), см. (4.33), (4.38)), будем иметь справа \bar{p}_2 . В другом варианте (4.63) умножается на соответствующее выражение для $A_j(2\mathbf{x}, t)$, тогда при усреднении слева будет корреляционный тензор, а справа \bar{p}_4 (а также корреляционный тензор в начальный момент). Наконец, умножая (4.63) на выражение для $A_j(2\mathbf{x}, t) A_j(3\mathbf{x}, t) A_m(4\mathbf{x}, t)$ и усредняя, получим четвертый момент, выраженный справа через \bar{p}_8 . Затем возьмем производную по времени от всех моментов и $\partial_t \bar{p}_2$, $\partial_t \bar{p}_4$, $\partial_t \bar{p}_8$ выразим с помощью (4.46). Тогда получим уравнения для моментов. Наконец, перейдем от \mathbf{A} и $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, взяв rot от каждого \mathbf{A} . Выпишем результат:

$$\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle \text{rot} [\mathbf{U} \langle \mathbf{B} \rangle] + \text{rot } \hat{N} \langle \mathbf{B} \rangle - \text{rot } \hat{M} \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (4.64)$$

$$\hat{N}_{ij} = \varepsilon_{iab} L_{ab,j} - \varepsilon_{iaj} L_{ab,b},$$

$$L_{ij,f} = \langle \tilde{u}_i (\partial_j \tilde{u}_j) \rangle, \quad \hat{M}_{ij} = \varepsilon_{iaj} \langle \tilde{u}_a \tilde{u}_b \rangle \partial_b.$$

В определении $L_{ij,f}$ производная ∂_j действует только на \tilde{u}_j (и не действует на все что справа, т. е. $\langle \mathbf{B} \rangle$). В остальных выписанных ниже уравнениях мы положили $\mathbf{U} = 0$. Кроме того, $B_{ij} = \langle B_i(1\mathbf{x}) B_j(2\mathbf{x}) \rangle$, $B_{ijfm} = \langle B_i(1\mathbf{x}) B_j(2\mathbf{x}) B_f(3\mathbf{x}) B_m(4\mathbf{x}) \rangle$,

$$\partial_t B_{ij}(1\mathbf{x}, 2\mathbf{x}) = {}^1, 2 L_{ab}^{ij} B_{ab}(1\mathbf{x}, 2\mathbf{x}) = \langle \alpha u_{ab}{}^\beta u_{cd} \rangle B_{ef}(1\mathbf{x}, 2\mathbf{x}) A_{ijabcedf}^{\alpha\beta}, \quad (4.65)$$

$\alpha u_{ab} = \varepsilon_{akl} \varepsilon_{lmb} \alpha \partial_k u_m(\alpha\mathbf{x})$ (по α не суммируется!),

$$\hat{A} = \alpha \partial_a (1x_i{}^\beta \partial_c{}^1 x_b \delta_{ed} \delta_{fj} + 2x_d{}^\beta \partial_c{}^2 x_j \delta_{ei} \delta_{fb} + 2^1 x_i{}^\beta \partial_c{}^2 x_j \delta_{eb} \delta_{fd}),$$

$$\alpha, \beta = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_{ijm} &= \frac{1}{2} \sum_{\beta > \alpha}^4 \alpha^{-\beta} L_{cd}^{\alpha\beta} B_{cdef}(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{x}, \gamma\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) \times \\ &\times \alpha \partial_a{}^\beta \partial_b{}^\gamma \partial_c{}^\delta \partial_f{}^1 x_i{}^2 x_j{}^3 x_f{}^4 x_m. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Наконец, для однородной, изотропной, отражательно инвариантной турбулентности $\hat{N} = 0$ и

$$\partial_t \langle \mathbf{V} \rangle = \text{rot} [\mathbf{U} \langle \mathbf{V} \rangle] + D_T \Delta \langle \mathbf{V} \rangle. \quad (4.67)$$

Классификация полей. Важной характеристикой магнитного поля является его масштаб. Поэтому целесообразно классифицировать поля по этому признаку.

1. Крупномасштабные поля (КП). Масштаб $L \gg l_0$ (напомним, что l_0 — внешний масштаб турбулентности). Соответствуют полю Солнца, Галактики, отдельной звезды в целом.

2. Поля промежуточных масштабов (ПП). Обладают по меньшей мере двумя масштабами. Один из них (обычно характеризующий изменение поля в горизонтальном направлении) велик: $L_1 \gg \gg l_0$, второй (обычно вертикальный) сравним с размером ячеек: $L_2 \approx l_0$. В качестве примера приведем поле в конвективной зоне, если конвективные ячейки велики.

3. Мелкомасштабные или тонкоструктурные поля (МП). Масштаб $L \approx l_0$ и $L < l_0$.

4. Поля сверхтонкой структуры (фибриллы, тонкие трубки). Они характеризуются не только малыми поперечными сечениями ($L \ll l_0$), но и большими напряжениями полей.

4.10. Турбулентное динамо мелкомасштабных полей

Проблема МП была поставлена Бэтчелором [187]. В этой работе была использована аналогия (1.123), и после эту проблему стали называть проблемой турбулентного динамо (хотя речь шла только о МП). Математическая постановка задачи заключалась в нахождении уравнения для корреляционного тензора B_{ij} на основе уравнения (1.45) при заданном u . Физически проблема заключается в сравнении двух конкурирующих процессов. Первый состоит в уменьшении масштаба, другой — в усилении поля, что связано с экспоненциальным удалением близких частиц (см. разд. 4.6). Более точно энергия поля данного масштаба L уменьшается, так как происходит ее утечка в меньшие масштабы — это первый процесс. Одновременно происходит рост энергии поля масштаба L за счет растяжения силовых линий — это второй процесс. Характерные частоты обоих процессов одинаковы и равны $\tau^{-1}(L) = u(L)/L$. Поэтому размерностная оценка не помогает выяснению того, какой из двух конкурирующих процессов преобладает. Не помогают и эвристические теории, изложенные, например, в разд. 4.1, модели или приближенные схемы. Теория должна дать точное сравнение двух конкурирующих процессов для ответа на основной вопрос турбулентного динамо МП: какова судьба слабых затравочных полей, происходит ли их усиление до наблюдаемых значений (см. [293]).

Подчеркнем еще раз, что проблема заключается в первую очередь в нахождении уравнения для B_{ij} . Поскольку оно уже выписа-

но (в виде (4.65)), то можно утверждать, что главная трудность преодолена.

При рассмотрении МП обычно полагают $\langle \mathbf{V} \rangle = 0$, а турбулентность считается однородной и изотропной. Целесообразно переписать (4.65) для этого случая ($2^x - 1^x = \mathbf{r}$, $\partial_i = \partial/\partial r_i$, $B_{ij} = B_{ij}(\mathbf{r})$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_i B_{ij} = & \partial_m \partial_n (\delta_{mn} T B_{ij} + T_{in} B_{mj} + T_{mj} B_{in} - T_{mn} B_{ij} - T_{ij} B_{mn}) - \\ & - L_{in, m} \partial_n B_{mj} - L_{mj, n} \partial_m B_{in} \end{aligned} \quad (4.68)$$

(см. определение (4.64)). Отсюда получаем при $\mathbf{r} = 0$

$$\partial_t \langle B^2 \rangle = 10 T_2 \langle B^2 \rangle, \quad \langle B^2 \rangle = \langle B^2 \rangle|_{t=0} \exp 10 T_2 t. \quad (4.69)$$

Учет омической диссипации. В рассматриваемом изотропном случае производные правой части (4.68) сводятся к $\partial/\partial r$, а вся правая часть — к уравнению второго порядка по $\partial/\partial r$. Поэтому этот оператор сводится к эрмитову. Напомним, что при рассмотрении ламинарного динамо оператор не сводится к эрмитову (см. разд. 3.3). Это обстоятельство, конечно, чисто математического свойства представляло главную трудность. Здесь же появляется возможность решения проблемы динамо МП без учета диссипации. Действительно, для поиска растущих решений можно воспользоваться прямыми вариационными методами. Причем для пробной функции $\bar{R}e_m \gg 1$, т. е. диссипация незначительна. Ничего не удивит в этом непосредственно.

Тем не менее из методических целей включение диссипации в (4.68) необходимо хотя бы из-за отмеченного экспоненциального уменьшения поля. В конце концов омическая диссипация обязательно включится. Учет диссипации осуществляется с помощью концепции гидродинамической микротурбулентности. Рассматриваемая проводящая жидкость (с проводимостью σ) заменяется другой (моделирующей средой), проводимость которой σ_m гораздо выше σ , так что $\eta_m = c^2/4\pi\sigma_m \ll \eta$. В новой проводящей среде задана однородная, изотропная и отражательно инвариантная микротурбулентность. Масштаб микродвижений l_m предполагается предельно малым, меньше всех присутствующих в задаче масштабов. Но микроскорость $u^{(m)}$ не мала, чтобы $u^{(m)} l_m \gg \eta_m$, и поэтому имеет место вмороженность поля в новой проводящей среде в микродвижение. Усреднение по микропульсациям (т. е. по масштабам, превышающим l_m) обозначим чертой сверху. Тогда согласно (4.67) уравнение для $\bar{\mathbf{V}}$ имеет вид

$$\partial_t \bar{\mathbf{V}} = \text{rot} [\mathbf{u} \bar{\mathbf{V}}] + \eta \Delta \bar{\mathbf{V}}. \quad (4.70)$$

Здесь обычная эйлерова скорость \mathbf{u} оказывается «крупномасштабной» из-за малости l_m . Параметры турбулентности можно подобрать так, чтобы турбулентный коэффициент диффузии $\bar{\eta}$ равнялся коэффициенту η рассматриваемой (первой) среды. Тогда, очевидно, (4.70) будет совпадать с усредненным уравнением (1.45).

Итак, динамика поля в рассматриваемой среде совпадает с эволюцией поля в моделирующей среде, проводимость, которой выше первой, но микродвижения вызывают эффективную проводимость, равную σ . Точность этого совпадения хотя и не абсолютная, но она тем выше, чем меньше l_m/δ (δ — минимальный масштаб поля). Следует иметь в виду, что величина l_m физически ничем не ограничена снизу, поэтому параметр l_m/δ произвольно мал. Поэтому для описания динамики поля будем пользоваться моделирующей средой. Причем усреднять нужно не только по микропульсациям, но и по обычным масштабам. Иначе говоря, необходимо иметь уравнения для $\langle \bar{\mathbf{B}} \rangle$, $\langle \bar{B}_i \bar{B}_j \rangle$ и т. д.

Тензор T_{ij} в этом случае имеет вид

$$T_{ij}({}^1\mathbf{x}, {}^2\mathbf{x}) = \langle \tilde{u}_i({}^1\mathbf{x}) \tilde{u}_j({}^2\mathbf{x}) \rangle + \overline{u_i^{(m)}({}^1\mathbf{x}) u_j^{(m)}({}^2\mathbf{x})}, \quad (4.71)$$

$$T_{ij} = \begin{cases} \langle u_i({}^1\mathbf{x}) u_j({}^2\mathbf{x}) \rangle, & {}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x} \neq 0, \\ \langle u_i({}^1\mathbf{x}) u_j({}^2\mathbf{x}) \rangle + \eta \delta_{ij}, & {}^2\mathbf{x} - {}^1\mathbf{x} = 0, \end{cases}$$

$u^{(m)}$ — поле, соответствующее микротурбулентности. Ввиду малости l_m оно дает вклад фактически при совпадающих точках ${}^2\mathbf{x}$ и ${}^1\mathbf{x}$, как записано в (4.71).

Динамо МП. Пользуясь представлениями (4.5) для соленоидальных полей, выпишем (4.68) в виде (см. [96, 398])

$$\partial_t B_{LL} = 2r^{-4} \partial_r r^4 \kappa \partial_r B_{LL} + Q B_{LL}, \quad (4.72)$$

$$B_{LL} = B_{ij} r_i r_j r^{-2}, \quad \kappa = T_{LL}(0) - T_{LL}(r) + \eta, \quad (4.73)$$

$$Q = -4(\partial_r T_{NN} r^{-1} + r^{-2} \partial_r r T_{LL}).$$

Правая часть (4.72) описывает перекачку энергии в малые масштабы (первый член) и рост энергии за счет растяжения жидких линий (второй член).

Естественно искать решение (4.72) в виде собственных функций, как в общей постановке проблемы динамо (см. разд. 3.3). При замене B_{LL} на $B = B_{LL} r^2$ оператор (4.72) становится эрмитовым и собственные функции ищутся в виде $B = \psi_m(r) \exp(-E_m t)$. Уравнение становится типа стационарного уравнения Шрёдингера с потенциальной «ямой». При достаточной глубине в яме появляются связанные состояния с $E_m < 0$, что в нашем случае соответствует наличию динамо-решения. Яма становится достаточно глубокой при $\text{Re } m \gg 1$.

Это и есть необходимое условие динамо МП. Нижнее собственное значение можно искать с помощью вариационного принципа, для чего необходимо найти минимум функционала

$$E = 2 \int_0^\infty [\kappa (d_r \psi)^2 + r^{-2} \kappa_1 d_r \psi^2] dr \int_0^\infty \psi^2 dr, \quad (4.74)$$

$$\kappa_1 = T_{NN}(0) - T_{NN}(r).$$

Воспользуемся пробной функцией в виде

$$\psi = (L/r)^\beta \exp(-L/r). \quad (4.75)$$

Масштаб L предполагается таким, чтобы $\widetilde{Re}_m \gg 1$, хотя и $L < l_0$. Воспользовавшись (4.8), убеждаемся, что функционал становится отрицательным при

$$\frac{\alpha - 1}{r} < \beta < (\alpha - 1) \left(\frac{4A_N}{A_L} + 1 \right) - \frac{1}{2} \alpha. \quad (4.76)$$

Снова принимая во внимание (4.8) и (4.9), видим, что имеется интервал, где $\beta > 0$, и (4.76) выполняется. Это обстоятельство и указывает на наличие динамо МП. Отметим, что омическая диффузия дает положительный вклад в функционал (4.74), но пренебрежимо малый при $\widetilde{Re}_m \gg 1$, что иллюстрирует высказанное выше утверждение о несущественной роли диссипации при выяснении вопроса о динамо МП (хотя само динамо без диссипации невозможно, см. разд. 3.3).

4.11. Мелкомасштабные поля в космических условиях

Характер усиления МП. Для несжимаемого движения $A_N/A_L = (\alpha + 2)/2$ (см. (4.9)) и, согласно сказанному выше, генерация осуществляется колмогоровской турбулентностью ($\alpha = 4/3$, см. (4.7)), турбулентностью с перемежаемостью ($4/3 < \alpha < 2$, следует из (4.18)). Такие же ограничения для α , $4/3 < \alpha \leq 2$, задаются когерентными структурами (см. разд. 4.2). Если жидкость целиком заполнена структурами, то $\alpha = 2$ и генерация поля имеет место. Интересно, что маломодовая турбулентность, представленная пульсациями типа (4.62) (\mathbf{k} меняется скачком, но $|\mathbf{k}| = \text{const}$, т. е. меняется только направление волнового вектора), тоже будет вызывать генерацию поля, если усредненные пульсации изотропны (т. е. амплитуда и равновероятна для всех направлений \mathbf{k}). Отметим, что данная модель напоминает странный аттрактор (см. разд. 4.3). Но важнее здесь то, что движения (4.62) являются простейшими, сдвиговыми и даже в каждый момент времени одномерными. Это говорит о том, что для турбулентного динамо вовсе не требуется экзотических движений. Похоже на то, что вообще всякое движение, которое хоть в каком-нибудь смысле может рассматриваться как однородное и изотропное, вызовет генерацию МП, например движение (4.24), хотя эйлерова скорость при этом вообще стационарна.

Универсальность динамо, т. е. его независимость от характера движений и от типа турбулентности, можно понять следующим образом. Согласно (1.119) вращательность может быть понята как сохранение величины $\int \mathbf{v} d\mathbf{S} = \oint A_i ds_i$. Оценивая ее, получим $AL = \text{const}$ или

$$A^2 \sim L^{-2}, \quad B^2 \sim L^{-4}. \quad (4.77)$$

Вектор-потенциал ведет себя как градиент скалярной примеси, что возвращает нас к аналогии (1.130). Если бы аналогия (1.125) (или (1.123)) была более физической, то это означало бы сохранение A^2 (аналог сохранения энергии) и $B^2 \sim L^{-2}$. В этом случае рост поля \mathbf{B} происходил бы за счет уменьшения масштаба. Второе соотношение (4.77) означает, что рост происходит в действительности быстрее уменьшения масштаба, в результате чего и имеет место генерация поля.

Итак, для действия динамо МП необходима изотропия и чтобы $Re_m \gg 1$. Достаточным условием явилось бы нахождение критического числа Re_m^c , при $Re_m > Re_m^c$ начинается возбуждение (ср. разд. 3.5). Оно не найдено, но этот вопрос очень актуален, поскольку в астрофизических условиях Re_m очень велико. Турбулентное динамо — быстрое (см. определение в разд. 2.5): как время выхода решения на собственную функцию, так и характерное время (экспоненциального) усиления есть l/u (следует из (4.74)). Вообще для точного значения инкремента и критического числа Re_m^c необходимо определить тензор T_{ij} в точном виде. Это можно осуществить с помощью экспериментального измерения динамики двух жидких частиц, после чего в духе обратных задач теории рассеяния определить T_{ij} в (4.46), (4.47). Итак, динамика полей при $Re_m \gg 1$ (что весьма трудно осуществить в лабораторных условиях) может быть изучена с помощью измерения динамики корреляционной функции скалярной примеси, что для лабораторных условий вполне достижимо.

Рост перемежаемости. Как говорилось в разд. 4.2, перемежаемость характеризуется эксцессом. Будем пользоваться выражением для эксцесса Δ (4.55), где вместо $\nabla\theta$ подставим \mathbf{B} . Согласно (4.66) получим

$$d_t \langle B^4 \rangle = 28 T_2 \langle B^4 \rangle, \quad (4.78)$$

(ср. с (4.56)). Сравнивая это соотношение с (4.69), получим, что эксцесс Δ растет как $\sim \exp 8 T_2 t$ (ср. с (4.57)). Рост перемежаемости поля \mathbf{B} интересен для очень слабых напряженностей поля, когда оно может считаться пассивным (т. е. когда нет обратного действия на движение). Тогда этот рост для полей $\nabla\theta$ и \mathbf{B} характеризует перемежаемость, которая естественно возникает в самой турбулентности. И действительно, согласно [248], перемежаемость в турбулентности возникает как концентрация вихря ω на поверхностях при заданном поле скорости u (см. разд. 4.2). Но в силу аналогии $\mathbf{B} \leftrightarrow \omega$ (1.123) это явление можно проследить на пассивном поле \mathbf{B} .

Установившееся состояние. Проблему кинематического динамо МП можно считать решенной [113]. Вопрос об установившемся состоянии МП — это вопрос о наблюдаемых полях во Вселенной, поскольку в них сосредоточена основная энергия магнитных полей. Здесь, однако, регулярные методы не развиты. Поэтому дальнейшие утверждения не вполне строги. Несомненно только

одно: энергия магнитного поля дорастает до приближенного равномерного распределения

$$a\rho \langle u^2 \rangle / 2 = \langle B^2 \rangle / 8\pi, \quad (4.79)$$

где $a \approx 1$. Действительно, если бы было $a \ll 1$, то поле продолжало бы генерироваться. В случае $a \gg 1$ силовые линии начали бы «распутываться» и генерировать движение (см. [49]), впрочем, случай $a \gg 1$ все же может осуществиться в особых условиях (см. разд. 5.10). Соотношение (4.79) с $a \approx 1$ хорошо подтверждается наблюдаемыми данными практически всех известных космических объектов.

«Грубая» характеристика (4.79) оказывается достаточной для ряда задач. Что касается более тонких эффектов, в частности установившихся спектров, то здесь можно дать лишь качественную картину. Установившаяся тонкая структура поля определяется характером движений и не является универсальной в отличие от кинематического динамо (см. выше настоящий раздел). Пусть турбулентность включает в себя движения масштаба l_0 , изгибающие и растягивающие силовую трубку, как на рис. 3.1. Этот процесс закончится, когда энергия поля в виде петли масштаба l_0 станет порядка кинетической, т. е. наступит равномерное распределение (4.79). Таким образом, образуются когерентные структуры (см. разд. 4.2): если таких петель много, то им уже не так-то просто распасться. Дело в том, что теперь движение может их только несколько изгибать, а диссипация несущественна.

Само изгибание и возмущение магнитных структур можно рассматривать как набор взаимодействующих МГД-волн (см. разд. 2.1). Они будут переносить энергию возмущений в область малых масштабов. Для определения спектра воспользуемся сохранением потока, $\tau(l)$ теперь есть время жизни волны и определяется нелинейным взаимодействием, $\tau(l) = lc_A^{(0)} / (u(l))^2$, $c_A^{(0)} = B_0 / \sqrt{4\pi\rho}$, B_0 — поле равномерного распределения (4.79). Тогда получим

$$E(k) = E_m \sim k^{-3/2-\mu}, \quad (4.80)$$

$$2\pi l_0 < k < k_1 = [u / (\eta + \tilde{\nu}) l_0^{1/2}]^{2/3}$$

(спектр Крейкнана [286]), E_m — спектр магнитных флуктуаций. В показателе включена мера перемежаемости μ . Последняя плохо изучена для МГД-волн, но она несомненно возникает из-за укрупнений фронта волн с тенденцией превращения в ударные. Величина μ ограничена: $0 < \mu < 1/2$, верхний предел соответствует (4.19) — набору ударных волн. Спектр обрезается либо омической диффузией η , либо вязкостью $\tilde{\nu}$, как в (4.80).

Структуры, однако, заполняют заведомо не весь объем. Движение, как неоднократно говорилось выше, приводит к уменьшению масштаба поля. Так, в разд. 2.7 (см. пример II) указано движение, всегда возникающее между двумя ячейками (см. (2.143)). В результате здесь не появляются пики поля (см. (2.144)). Действ-

вие динамо означает, что это поле с характерным масштабом δ_v по (2.142) растет экспоненциально. Конечно, рост поля ограничивается, система приходит к равнораспределению (4.79). Установившееся состояние представляет собой множество пиков поля, расположенных на поверхностях, т. е. состояние является примером сильной перемежаемости. Спектр похож на белый шум (ср. с (4.19)), обрезаемый при $k > 2\pi/\delta_v$. Между пиками полей, генерируемыми небольшими ячейками (расстояние между ячейками $\sim l_0$), образуются слабые пики, генерируемые более мелкими ячейками. Толщина пиков меньше, чем δ_v , поскольку она определяется меньшими числами Re_m . Результирующий спектр тоже белый шум, обрезаемый при $k_2 = \min \{l_0^{-1} Re_m^{3/4}, l_\chi = l_0^{-1} Re_m^{1/4}\}$.

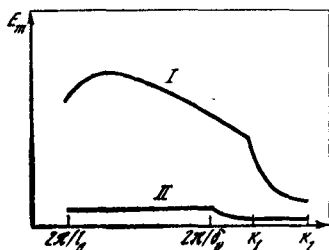


Рис. 4.2. Спектры магнитных флуктуаций

I — спектр Крейнмана $\sim k^{-3/2}$;
II — спектр магнитной перемежаемости, плоская часть его в $Re_m^{3/2}$ раз ниже максимума спектра *I*

Два вида спектра, соответствующие двум «популяциям» в турбулентной среде: спектр (4.80) и белый шум, изображены на рис. 4.2. Наблюдаемый спектр, как правило, соответствует небольшим масштабам (ввиду слабого разрешения приборов). Поэтому в первую очередь наблюдается спектр *I* (см. рис. 4.2), причем $E_m(k) = E(k)$. Кроме того, из-за наличия спектра *II* должна наблюдаться также перемежаемость поля, причем энергия этих тонкоструктурных полей тоже порядка энергии равнораспределения. Численные расчеты, правда при небольших Re_m ($Re_m \approx 100$), качественно подтверждают данную картину [247].

4.12. Крупномасштабные поля: кинематика

Хотя энергия КП обычно значительно меньше энергии МП, динамика КП существенна, так как представляет собой глобальное поле звезды (или галактики) в целом. Укажем на основные эффекты турбулентности.

1. Турбулентная диффузия КП. Об этом явлении, соответствующем наибольшей степени симметрии, уже говорилось в разд. 4.9 (см. формулу (4.67)). Важно, что $D_T = T$, $T_{ij}(0) = \delta_{ij}T$, откуда следует, что коэффициент турбулентной диффузии всегда положителен. В более общем случае следует пользоваться тензором \bar{M} в (4.64). Принимая во внимание положительную определенность тензора $\langle \tilde{u}_a \tilde{u}_b \rangle = T_{ab}(0)$ (и его очевидную симметрию относительно перестановки индексов), нетрудно видеть, что в общем случае происходит лишь анизотропная диффузия КП (энергия КП монотонно уменьшается, динамо невозможно).

2. При отказе от отражательной симметрии (гиротропная, спиральная турбулентность), но с сохранением изотропии получаем с помощью (4.64)

$$\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle = \text{rot} [U \langle \mathbf{B} \rangle] + \text{rot} \alpha \langle \mathbf{B} \rangle + D_T \Delta \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (4.81)$$

$$\alpha = -\frac{1}{3} \langle \hat{\mathbf{u}} \text{rot} \hat{\mathbf{u}} \rangle = -\frac{1}{3} \varepsilon_{ijl} L_{ij,l} =$$

$$= 2T_c(0) \approx -\frac{1}{3} \Omega \frac{1}{\rho \langle u^2 \rangle} l^2 \nabla \langle u^2 \rangle \rho,$$

$$D_T = \frac{1}{3} \langle \bar{u}^2 \rangle = \frac{1}{3} T_{ij}(0) \approx \frac{1}{3} ul$$

(см. (4.20)). Это уравнение, впервые полученное в [386], положено в основу практически всех расчетов динамо-моделей и является обоснованием модели Паркера (см. конец разд. 3.5). При получении оценки величины α мы воспользовались (4.23), $\alpha \approx H\tau$.

При $\Omega = \text{const}$ в принципе возможно так называемое α^2 -динамо. Возбуждение (α -эффект) возникает при

$$\gamma = \frac{|\alpha|}{L} > \frac{D_T}{L^2}, \quad |\alpha| L > D_T, \quad \frac{L}{L_\rho} \text{Ro}^{-1} > 1, \quad (4.82)$$

(где γ — инкремент нарастания поля; L_ρ — масштаб неоднородности турбулентности. Поскольку обратное число Россби в оценке (4.81) $\text{Ro}^{-1} < 1$ (при $\text{Ro}^{-1} \gg 1$ турбулентность становится двумерной, см. (4.10)) и масштаб поля чаще всего невелик: $L \approx L_\rho$, то условие (4.82) редко выполняется в естественных условиях.

Большой интерес представляет $\alpha - \Omega$ -динамо с включением дифференциального вращения. B_φ -составляющая генерируется дифференциальным вращением, а полоидальное поле, т. е. A_φ -составляющая, генерируется α -эффектом. Возбуждение наступает при

$$\gamma = (\alpha \delta \Omega / L)^{1/2} > D_T / L^2, \quad (4.83)$$

$$N_D = (\alpha \delta \Omega / L)^{1/2} L^2 / D_T > 1, \quad 3\text{Ro}^{-1} (\delta \Omega l / u) (L^3 / L_\rho l^2) > 1;$$

$\delta \Omega$ — изменение Ω на длине L ; N_D — динамо-число. Критерий (4.83) выполняется значительно легче, чем (4.82).

Отметим, что α -эффект интенсивно изучался для $\text{Re}_m \ll 1$ (в приложении к земному ядру, см. [320]). В этом случае можно непосредственно усреднять (1.45), а корреляцию $\langle \mathbf{uB} \rangle$ вычислять по теории возмущений, поскольку флуктуации поля \mathbf{b} , $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}$, малы ($b / |\langle \mathbf{B} \rangle| \ll 1$). Тогда оказывается, что поправка к коэффициенту η мала, так что $D_T = \eta$, а α в (4.81) определяется так: $\alpha = -(1/3) \langle \mathbf{u} \text{rot} \mathbf{u} \rangle / \eta k^2$, k — волновой вектор возмущения скорости, $k = 2\pi/l$. С помощью (4.23) получаем оценку $\alpha \approx (-1/3) (l^3 / \rho u \eta) \Omega \nabla \langle u^2 \rangle \rho$ и вместо (4.82) имеем критерий $(1/3) \text{Re}_m^2 \text{Ro}^{-1} L / L_\rho > 1$, значительно более жесткий (поскольку здесь $\text{Re}_m \ll 1$). А условие действия $\alpha - \Omega$ -динамо

(4.83) записывается в виде $(1/3)\text{Re}_m \text{Ro}^{-1} (\delta\Omega l/u)(L^3/L_0 l^2) > 1$. При $\text{Re}_m \ll 1$ возбуждение в принципе возможно.

3. При отказе от трансляционной симметрии, т. е. для неоднородной турбулентности, получаем ряд эффектов переноса. Естественно рассмотреть главные эффекты, которые возникают только из-за неоднородности турбулентности, не включая сюда дополнительную анизотропию. Турбулентность, в которой анизотропия минимальна и является неизбежным следствием неоднородности, называется квазиизотропной. Выпишем нужные для (4.64) тензоры квазиизотропной турбулентности:

$$T_{ij}(^1\mathbf{x}, ^1\mathbf{x}) = \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle_s = \langle \tilde{u}_3^2 \rangle \delta_{ij}, \quad (4.84)$$

$$L_{ij,t} = \delta_{ij} \lambda_t + \frac{1}{D-1} [\delta_{if} (\lambda_j - U_j^{(T)}) - \delta_{jf} (\lambda_i - U_i^{(T)})], \quad (4.85)$$

$\lambda = 1/2 \nabla \langle \tilde{u}_3^2 \rangle$, см. (4.45). Выражение (4.84) как раз и соответствует максимальной изотропии. Соотношение (4.85) получается как единственно возможное при учете слабой неоднородности ((4.85) линейно по λ и $U^{(T)}$) и следующих свойств: $L_{ij,t} = -\langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle \rho^{-1} \partial_j \rho = -U_i^{(T)}$ (см. (4.49)) и $L_{ij,t} + L_{ji,t} = \partial_t \langle \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle = 2\delta_{ij} \lambda_t$. Здесь параллельно рассматривается анизотропная трехмерная ($D = 3$, $\langle \tilde{u}_1^2 \rangle = \langle \tilde{u}_2^2 \rangle = \langle \tilde{u}_3^2 \rangle$) и двумерная ($D = 2$, $\tilde{u}_1 = 0$, $\langle \tilde{u}_2^2 \rangle = \langle \tilde{u}_3^2 \rangle$) турбулентность. Подставляя (4.84), (4.85) в (4.64) (где положим $U = 0$), получим для $D = 3$:

$$\partial_t \langle \mathbf{B} \rangle = -\text{rot } D_T^{1/2} \text{rot } D_r^{1/2} \langle \mathbf{B} \rangle = \text{rot } [U^T \langle \mathbf{B} \rangle] - \text{rot } D_T \text{rot } \langle \mathbf{B} \rangle, \quad (4.86)$$

$U^{(T)} = \nabla D_T / 2$. При $D_T = \text{const}$ возвращаемся к (4.67).

При $\rho = \text{const}$ в трехмерном случае имеется перенос поля со скоростью $-\nabla D_T / 2$ (в область меньшей интенсивности турбулентности). Кроме того, (4.86) следует из «макроскопической» электродинамики с турбулентными проводимостью и магнитной проницаемостью: $\sigma_T = \sigma \text{Re}_m^{-1/2}$, $\mu_T = \text{Re}_m^{-1/2}$. В двумерном случае перенос происходит со скоростью $-\nabla D_T$, что эквивалентно $\sigma_T = \sigma$, $\mu_T = \text{Re}_m^{-1}$. Это явление диамагнитного выталкивания поля большого значения не имеет, так как оно существенно ослабляется парамагнетизмом (см. разд. 4.13).

Главный процесс переноса — из-за градиента плотности. Он, правда, отсутствует в трехмерной турбулентности (4.86) (но является в нелинейном режиме, см. разд. 4.13). Пусть плотность убывает в вертикальном направлении (с ростом z). Двумерная турбулентность вызывает перенос. При опускании (подъеме) магнитной трубки, параллельной оси x (в данном случае она движется как целое), трубка сжимается (расширяется), таким образом, условие $\text{div } \mathbf{u} \rho = 0$ выполняется. Поэтому опускание обладает большим статистическим весом, нежели подъем, в результате чего и возникает перенос поля вниз, т. е. параллельно $\nabla \rho$ (см. [236]). Горизонтальная магнитная трубка, параллельная оси y , ведет себя иначе. Она не движется как целое, а изгибается

под действием конвективных движений. Причем при подъеме жидкость растекается, что приводит к усилению поля в этом месте (рис. 4.3, а). При опускании, наоборот, происходит стекание, а значит, ослабление поля (рис. 4.3, б). В целом получается перенос вверх, т. е. антипараллельно $\nabla\rho$ (см. [36], а также численное подтверждение этих эффектов в [253, 183, 181]). Заметим, что этот же рис. 4.3 объясняет диамагнитный перенос, если вектор $\nabla\langle u^2 \rangle$ направлен вниз. В трехмерном случае эти два процесса конкурируют друг с другом. Например, трубка, параллельная оси x , по-прежнему переносится вниз движениями в плоскости yz ,

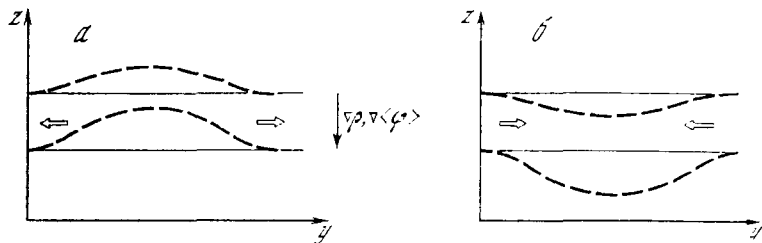


Рис. 4.3. Перенос магнитной трубки

а и б — возмущение поля при подъеме и при опускании вещества. Стрелками показано растекание жидкости при подъеме и стекание ее при опускании

а движения в плоскости xz переносят ее вверх. Согласно (4.86) в квазистационарной турбулентности эти процессы в точности компенсируют друг друга, в результате чего перенос из-за $\nabla\rho \neq 0$ вообще исчезнет.

4.13. Крупномасштабные поля: макроскопическая МГД

Проблемы нелинейной динамики КП могут быть разделены на два вопроса. Первый — это воздействие МП на КП и вклад МП в крупномасштабные силы при слабой напряженности КП, Второй — то же самое при неслабой напряженности КП.

Слабое поле $\langle \mathbf{V} \rangle$. Будем называть КП слабым, если оно не влияет на турбулентность. Критерий будет выписан ниже. Крупномасштабные поля $\langle \mathbf{V} \rangle$, U возмущают турбулентность, которая считается квазизотропной (см. разд. 4.12). В результате обратной реакции турбулентность влияет на $\langle \mathbf{V} \rangle$ и U . Действуя по схеме разд. 4.1, можно получить систему уравнений для моментов и $\langle \mathbf{V} \rangle$. Выпишем уравнения для $\langle \mathbf{V} \rangle$:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \mathbf{V} \rangle - \text{rot} [U \langle \mathbf{V} \rangle] = \text{rot} \alpha \langle \mathbf{V} \rangle + \text{rot} [U_\rho \langle \mathbf{V} \rangle] - \\ - \text{rot} D'_T \text{rot} \langle \mathbf{V} \rangle - \text{rot} \text{rot} D''_T \langle \mathbf{V} \rangle, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$D'_T = \frac{1}{3} \tau \left(\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle + \frac{\langle B^2 \rangle}{8\pi\rho} \right), \quad D''_T = \frac{1}{3} \tau \left(\frac{1}{2} \langle u^2 \rangle - \frac{\langle B^2 \rangle}{8\pi\rho} \right),$$

$$U_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{8\pi\rho^2} \right) \langle B^2 \rangle \nabla\rho.$$

Обратное действие поля на движение сказывается в электромагнитной силе, вызываемой КП, которое генерируется турбулентностью. Кроме того, появляется турбулентное давление p_T и турбулентная вязкость [38]. Что касается динамики поля $\langle \mathbf{V} \rangle$, то отметим прежде всего, что при $\langle B^2 \rangle = 0$ (4.87) переходит в (4.86), т. е. происходит диамагнитный перенос и турбулентная диффузия. В реальном случае, однако, выполняется (4.79) с $a \approx 1$. При $a \gtrsim 1$ коэффициент D_T'' становится отрицательным. Это означает, что диамагнитный перенос сменился парамагнитным (в обратном направлении: в область большей интенсивности турбулентности). Скорее всего, следует считать, что $a \approx 1$, и величиной D_T'' можно пренебречь. Следовательно, имеется только перенос со скоростью U_ρ из-за градиента плотности. Напомним, что в кинематике в трехмерной турбулентности этот перенос отсутствовал из-за точного баланса двух конкурирующих процессов (см. разд. 4.12). Нелинейность нарушает этот баланс, и возникает перенос поля, параллельный $\nabla \rho$. Ввиду резкого градиента плотности (в солнечной конвективной зоне) этот процесс является наиболее существенным процессом, он происходит со скоростью $U_\rho \approx \langle u^2 \rangle^{1/2}$. Это максимально возможная скорость.

Неслабое поле $\langle \mathbf{V} \rangle$. Среднее поле пронизывает всю плазму. Турбулентные движения масштаба l_0 генерируют магнитные петли такого же масштаба, т. е. МП. Далее, согласно разд. 4.10, эти петли, или магнитные неоднородности, должны запутываться турбулентными движениями, в результате чего происходит уменьшение масштаба поля и его усиление. В разд. 4.11 говорилось, что в конце концов масштаб поля станет порядка δ_v (см. (2.142)), а усиление происходит в $Re_m^{1/2}$ раз (см. (3.10)). Напряженность поля, однако, не может превышать уровень равномерного распределения B_e (4.79). Поэтому начальная напряженность не должна быть большой:

$$|\langle \mathbf{V} \rangle| < B_e Re_m^{-1/2}, \quad B_e = u \sqrt{4\pi\rho}. \quad (4.88)$$

Это и есть критерий того, что поле слабое. Что же произойдет в процессе генерации КП, когда критерий (4.88) нарушится? В этом случае ячейки размера l_0 уже не смогут обеспечить поток энергии, который идет от КП, в область диссипации. А без диссипации ни динамо, ни турбулентная диффузия невозможны. Поле ведет себя квазиколлебательным образом: силовые линии поля $\langle \mathbf{V} \rangle$ то «запутываются», то «распутываются» и уменьшение масштаба поля недостаточно для включения диссипации. Можно сказать, что время жизни магнитного возмущения размера l_0 уже не $\tau_0 = l_0/u$ (l_0), а гораздо больше. Но в этом случае выражение (4.1) окажется несправедливым для магнитных возмущений, время памяти здесь должно быть каким-то другим. В то же время (4.1) по-прежнему справедливо для возмущений скорости: время жизни гидродинамических возмущений порядка τ_0 . Поэтому конвекция не сильно модифицируется полем.

Магнитные возмущения теперь уничтожаются ячейками, размеры которых меньше l_0 . Действительно, как и в разд. 4.11, усиление поля (или пики поля) возникает между двумя ячейками размера l_0 . Между этими пиками меньшие ячейки создают свое усиление, свои пики. Полагая, что кинетическая энергия ячеек подчиняется колмогоровскому спектру и что $Re > Re_m$, можно написать выражение (4.88) для ячейки произвольного размера. Выпишем выражения для ячеек наибольших размеров, способных привести к диссипации КП, и новое ограничение на КП:

$$l = l_0 Re_m^{-3/2} B_e |\langle \mathbf{V} \rangle|, \quad l_0 Re_m^{-3/2} < l < l_0, \quad (4.89)$$

$$|\langle \mathbf{V} \rangle| < B_e Re_m^{-1/4}. \quad (4.90)$$

Размер l_0 ограничен снизу условием вмороженности в движущуюся ячейку. На верхнем пределе $l = l_0$ (4.89) переходит в (4.88). Воспользуемся теперь оценками (4.81): $\alpha \sim l^2$, $D_T \sim l^{1/2}$ и выпишем новые значения α и D_T , справедливые, когда (4.88) не выполняется:

$$\alpha = \alpha_0 Re_m^{-3} (B_e / |\langle \mathbf{V} \rangle|)^6, \quad D_T = D_T^{(0)} Re_m^{-2} (B_e / |\langle \mathbf{V} \rangle|)^4, \quad (4.91)$$

$$\alpha_0 Re_m^{-3/2} \leq \alpha \leq \alpha_0, \quad \eta \leq D_T \leq D_T^{(0)},$$

α_0 , $D_T^{(0)}$ — невозмущенные значения для случая, когда (4.88) выполняется. Подставляя (4.91) в (4.82) и (4.83), видим, что при возрастании напряженности КП α^2 -динамо быстро выключается (так как α падает быстрее D_T), а α — Ω -динамо не выключается. Однако инкремент γ во втором случае сильно падает. Конкретные оценки для солнечных и галактических магнитных полей будут даны в разд. 7.3, 7.4.

4.14. Поля промежуточных масштабов. Краевые эффекты

Глобальные магнитные поля небесных тел все-таки, как правило, не являются полностью крупномасштабными. Так, вертикальный характерный размер поля в солнечной конвективной зоне сравним с размером конвективных ячеек, поперечный (перпендикулярный к диску) размер галактического поля сравним с размером межзвездных облаков и соответственно с толщиной самого диска. Но другой характерный размер — в горизонтальном направлении — не мал, и это обстоятельство позволяет рассматривать такие поля не мелкомасштабными. Будем называть их полями промежуточных масштабов (ПП).

Рассмотрим горизонтальный слой $0 < z < L_2$, размер ячеек $l \approx L_2$. Поле имеет составляющую, которая медленно меняется в плоскости xy . Будем понимать под $\langle \mathbf{V} \rangle$ усреднение поля в плоскостях $z = \text{const}$ по горизонтальным размерам, много большим, чем l . Тогда $\langle \mathbf{V} \rangle$ будет зависеть от всех трех координат, причем в вертикальном направлении поле меняется на масштабах по-

рядка l и меньше, в то время как в горизонтальном — на размере, много большем l . В частном случае при усреднении по всей горизонтальной плоскости $\langle \mathbf{B} \rangle$ зависит только от z . В сферической системе усреднение можно проводить по φ : $\langle \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{B} d\varphi$.

Таким образом выделяется осесимметричная составляющая [20].

Уравнение для $\langle \mathbf{B} \rangle$, конечно, совпадает с (4.64). Необходимо только задать тензоры $T_{ij}({}^1\mathbf{x}, {}^1\mathbf{x})$ и $L_{ij,f}$. Воспользуемся опять квазизотропной турбулентностью (минимальная анизотропия, связанная с неоднородностью). Только теперь в отличие от разд. 4.12 вблизи границ $z = 0, L_2$, где турбулентность кончается, анизотропия (связанная с неоднородностью) не может быть малой. Все же будем полагать, что никакой дополнительной анизотропии нет. Тензор $T_{ij}({}^1\mathbf{x}, {}^1\mathbf{x})$ выписан в (4.50), а $L_{ij,f}$ имеет вид

$$L_{ij,f} = \frac{1}{2} \partial_3 \langle \tilde{u}_2^2 \rangle \delta_{ij} e_f + \frac{1}{2} (\partial_3 \langle \tilde{u}_3^2 \rangle - \partial_3 \langle \tilde{u}_2^2 \rangle) e_i e_j e_f + \frac{1}{D-1} [\delta_{if} (\lambda_j + U_j^{(r)}) - \delta_{ji} (\lambda_i + U_i^{(r)})], \quad (4.92)$$

$\tilde{u}_3 \rightarrow 0$ при $z = 0, L_2$. При $\langle \tilde{u}_2^2 \rangle = \langle \tilde{u}_3^2 \rangle$ (4.50) переходит в (4.84), а (4.92) — в (4.85). В трехмерном случае $\langle \tilde{u}_1^2 \rangle = \langle \tilde{u}_2^2 \rangle$, $D = 3$.

Перенос и накачка. В трехмерном случае согласно (4.92) имеется перенос поля со скоростью $-\lambda = -\nabla \langle \tilde{u}_3^2 \rangle / 2$. Накачкой называют преимущественный перенос поля в одном из направлений: вверх или вниз. Перенос со скоростью $-\lambda$ не приводит к накачке, так как ввиду граничных условий на \tilde{u}_3 при $z = 0, L_2$ (4.92)

имеем: средняя скорость $(1/L_2) \int_0^{L_2} \lambda dz = 0$. В двумерной турбулентности происходит перенос $\langle B_x \rangle^0$ -составляющей со скоростью $U^{(r)} \sim \nabla \rho$. Если плотность меняется монотонно, скажем, убывает вверх, то средняя скорость $(1/L_2) \int_0^{L_2} U^{(r)} dz < 0$, т. е. имеется накачка поля в направлении $\nabla \rho$. Что касается поля $\langle \mathbf{B}_\perp \rangle$, то оно переносится со скоростью $\tilde{U}^{(r)} - 2\lambda$, а накачка происходит только из-за градиента плотности: $(1/L_2) \int_0^{L_2} \tilde{U}^{(r)} dz \sim -\nabla \rho$ (вверх при убывании вверх плотности).

В слабопроводящей среде обнаружена топологическая накачка [237], происходящая при $\nabla \rho = 0$. Суть ее заключается в следующем. Вещество поднимается в топологически несвязанных областях конвективных ячеек, а опускается в связанных. Поднимающееся вещество образует небольшие магнитные петли первоначально горизонтального поля, в то время как опускающееся слабо изгибает эти поля. В результате появляется преимущественный перенос поля вниз. Так происходит, однако, лишь при

небольших числах Re_m , когда поднимающиеся петли быстро диссипируют и не дают вклада вверх. При увеличении Re_m поднимающиеся петли начинают расширяться растекающимся веществом, образуя горизонтальные поля со знаком, противоположным начальному [182]. А верхние части петель эффективно переносят магнитный поток вверх. При $Re_m \gg 1$, как следует из изложенного выше, перенос вверх сравнивается с переносом вниз и накачка отсутствует.

Иногда полагают, что в реальной турбулентной среде ячейки, размер которых несколько меньше самых больших, эффективно снижают проводимость, так что число Re_m , перенормированное на эту проводимость, невелико. Поэтому накачка наибольшими ячейками как будто должна быть. В действительности же меньшие ячейки дают довольно сильный диамагнитный эффект, который в верхней части слоя представляет собой эффективный перенос вверх. Как показывает точный расчет, автоматически учитывающий вклад ячеек всех масштабов, этот перенос компенсирует накачку наибольшими ячейками, в результате накачка отсутствует.

Отметим, что вообще сопоставление случая $Re_m \gg 1$ с численными расчетами при небольших Re_m не всегда возможно. Так, в численных расчетах [253, 189, 181] накачка появляется для двумерных ячеек определенной формы, в то время как при $\Gamma\rho = 0$ она отсутствует. Если даже засомневаться в данной теории, можно воспользоваться аналогией $A_x \leftrightarrow \tilde{\theta}$, справедливой для двумерных полей (см. (1.105), (1.129)). Согласно (4.41) при $\Gamma\rho = 0$ накачки нет. Почему же численные расчеты дают накачку? Дело в том, что в аналогии не учтены граничные эффекты. Граничные условия для A_x и $\tilde{\theta}$, вообще говоря, разные, они существенны при небольших Re_m . Отметим, наконец, что анизотропная турбулентность вызывает накачку поля даже при $\Gamma\rho = 0$ [39].

Краевые эффекты. Среди трудностей ламинарного динамо в разд. 3.5 указано на роль эффектов на границе тела. Прежде всего, именно на границах $z = 0$, L_2 происходит эффективное уменьшение масштаба поля, нормального к границе, как на рис. 2.3 справа от точки $y = 0$: при $y = 0$ поле не меняется, а справа происходит укручение профиля, т. е. формирование ТС.

В более общем случае происходит диамагнитный перенос к границам $z = 0$, L_2 . В результате здесь формируются пики поля. В любом случае толщина ТС или пиков поля определяется значительной омической диффузией.

Граничная задача для III может быть сформулирована не только для однородно проводящей среды. Теория может быть построена при наличии границы с вакуумом (или с изолятором): обстоятельство, имеющее большое значение для астрофизики. Пусть, например, при $z > L_2$ среда непроводящая (вакуум, изолятор). Тогда микропульсации задаются пространственно однородными, но проводимость моделирующей среды σ_m (см. разд. 4.10) меняется скачком при $z = L_2$: при $z < L_2$ она очень велика,

а при $z > L_2$ $\sigma_m = 0$. Тогда при усреднении по микропульсациям по-прежнему получаем (4.70), но уже с вакуумными граничными условиями при $z = L_2$ (см. [41]). Вакуумные же условия получаются для $\langle \mathbf{V} \rangle$. К сожалению, граница со сверхпроводником не имитируется моделирующей средой. Граничные условия для $\langle \mathbf{V} \rangle$ в этом случае неизвестны. Именно поэтому топологическая накачка, полученная при идеально проводящих граничных условиях, отсутствует в (4.92). Впрочем, возможно, анизотропная накачка [39, 41] и соответствует топологической (см. конец предыдущего пункта). Но это не проверялось численным счетом.

Генерация поля. Коэффициенты (4.50), (4.92) зависят только от z , поэтому уравнения можно решать на собственные значения с $\mathbf{V} = \mathbf{V}_n(z) \exp(-ixk_x - iyk_y - Et)$ как одномерную задачу. Несмотря на это заманчивое обстоятельство, такое исследование до сих пор не было проведено. Неизвестно также поведение поля в более общем анизотропном случае. По-видимому, генерация поля происходит, поскольку антидинамо-теоремы не дают запретов в данном случае (см. разд. 3.4).

Предполагаемое возбуждение поля является, по всей вероятности, аналогом механизма динамо-эжектора Паркера [334] в высокопроводящей среде (сам механизм получен для $\text{Re} \tau_m \gg 1$). Суть механизма заключается в накачке поля одного знака и выбросе (эжекции) поля другого знака из зоны $0 < z < L_2$, в результате в этой области происходит экспоненциальное усиление поля одного знака (подробное описание дано в [38]). Эжекция осуществляется выбросом магнитной арки вместе с веществом в вакуум (при $z > L_2$). Впоследствии вещество стекает вдоль силовых линий назад в область $z < L_2$, в результате чего поле при $z > L_2$ становится вакуумным ($\text{rot } \mathbf{V} = 0$). Интересно отметить, что формально действие механизма динамо-эжектора описывается одним уравнением для одной компоненты $\langle B_y \rangle$. Таким образом, в отличие от обычной ситуации, описанной в разд. 3.4, отделение одной из компонент не приводит к антидинамо-теореме. Это связано с новыми граничными условиями в области эжекции.

Перейдем к обсуждению динамо при усреднении по одной из горизонтальных координат, скажем по x . В этом случае $\langle \mathbf{V} \rangle$ зависит только от y, z . Хотя в механизме динамо-эжектора остается зависимость только от z , при обычных граничных условиях исключение зависимости от x не дает возможности действия динамо без α -эффекта. Для работы $\alpha - \Omega$ -динамо следует ввести крупномасштабную скорость $\{U_x(y, z), 0, 0\}$ (аналог дифференциального вращения) и в (4.92) добавить члены типа $\epsilon_{ijl} \langle \hat{u} \text{rot } \hat{u} \rangle / 6$. Тогда эта скорость вытягивает $\langle B_x \rangle$ -составляющую (аналог тороидального поля), а $\langle B_z \rangle$ -поле (аналог полоидальной составляющей) генерируется за счет α -эффекта. Однако в случае вакуумных граничных условий при $z = L_2$ для генерации поля возникают по меньшей мере три затруднения. Прежде всего, обратная связь, т. е. генерация полоидального поля из тороидального, осуществляется вкладом α -эффекта в уравнение для $\langle A_\varphi \rangle$, т. е. в данном

случае в уравнение для $\langle A_x \rangle$, или согласно (4.64) величиной $N_{11} \langle B_x \rangle = \varepsilon_{1ab} L_{ab,1} \langle B_x \rangle$. Однако на поверхности $z = L_2 \langle B_x \rangle = 0$ (поскольку $\partial_x = 0$ и $\text{rot} \langle \mathbf{B} \rangle = 0$ при $z > L_2$, тороидальное поле обращается в нуль на поверхности тела). Кроме того, при $z = L_2 N_n = 0$ (поскольку $\varepsilon_{1ab} L_{ab,1} = L_{23,1} - L_{32,1} = 0$ ввиду граничного условия $\tilde{y} = 0$ при $z = L_2$, см. [357]). Из-за этих двух причин и $\text{rot} \alpha \mathbf{V} = 0$ при $z = L_2$. Итак, генерация полоидального поля происходит только внутри зоны $0 < z < L_2$, т. е. внутри звезды, а на поверхности она прекращается. Наконец, выход полоидального поля из идеально проводящей среды невозможен (парадокс Бонди и Голда о сохранении магнитного момента звезды [205], а последний как раз и задается внешним полоидальным полем). Таким образом, генерация должна происходить внутри звезды, но это ненаблюдаемый процесс, так как поле не выходит на поверхность. Учет неидеальности среды снижает эти затруднения. На поверхности $z = L_2$ формируются ТС и пик поля, и омическая диффузия здесь существенна [289]. Поле легко диффундирует в вакуум. Другой выход был указан Паркером [132]. Он состоит в эжекции поля (выброс поля с веществом и затем стекание вещества вниз).

Сравнение с теориями Моффата—Крейкнана и Паркера. Об отрицательном коэффициенте диффузии. Обсудим сначала эффекты однородной турбулентности. Согласно (4.39) и (4.81) турбулентность вызывает турбулентную диффузию с положительным коэффициентом D_T . С другой стороны, если раскладывать решение (1.45) в ряд по степеням u и оборвать ряд на члене какого-то высокого порядка, в принципе можно получить и отрицательный коэффициент диффузии. Это объясняется тем, что в данном случае получается уравнение, интегральное по времени (и, быть может, по пространственным координатам). Его еще нужно перевести в уравнение типа (4.37), т. е. избавиться от интегральной зависимости от времени (см. [398]). Это обстоятельство не позволяет непосредственно сопоставить результаты данной теории и теории возмущений. Отметим, что если пользоваться уравнением типа (4.37) не обязательно второго порядка (т. е. ОУКФП), то нужно анализировать вклад членов более высокого порядка в уравнение (4.81). Достаточно рассмотреть член третьего порядка $\sim \partial_i \partial_j \partial_l p_2$: он еще может дать вклад в (4.81), но, как оказывается, не дает. Так что по-прежнему $D_T > 0$ (см. [38]).

Моффат [319] предложил другое разложение по степеням l/L (см. также [287, 288]). Разложение можно законно оборвать, поскольку $l/L \ll 1$. При этом используется точное решение (1.115) ($J = 1$, поскольку рассматривается случай $\text{div} \mathbf{u} = 0$). Раскладывая $B_j^{(0)}(\mathbf{a})$ по степеням ξ , $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \xi$, и ограничиваясь членами второго порядка и усредняя, Моффат получает член неизвестной природы: $\hat{M}_3 = \langle \xi_f \xi_m \tilde{\partial}_j \xi_i \rangle$, который, как он полагает, может привести к нефизической расходимости коэффициентов α и D_T . Анализ, однако, показывает, что в однородном случае уравнение (4.81) остается в силе и расходимости нет [45].

Отметим, что в работе Крейкнана [288] корреляции смещений определяются численно. При этом коэффициент D_T мог получиться отрицательным. По этому поводу можно сказать следующее. Во-первых, численный счет в [288] проводился до времени $t = 4\tau$, в то время как изложенная теория верна при $t \gg \tau$, т. е. для асимптотических режимов (из графиков функций $\alpha(t)$ и $D_T(t)$, приведенных в [288], видно, что по меньшей мере для случая, когда численный счет дает отрицательный D_T , они не выходят на асимптотический режим). Во-вторых, при расчете α и D_T в [288] в качестве статистики турбулентности было использовано многомерное нормальное распределение поля скорости. В то же время ОУКФП следуют, в частности, из одномерного нормального распределения смещений (см. разд. 4.5) — предположения существенно более слабого. К тому же многомерное нормальное распределение далеко не всегда может служить статистикой турбулентности даже в рамках кинематического подхода. Отрицательная диффузия $D_T < 0$ получалась также у Паркера [132] для ПП, наподобие динамо-эжектора. Проводилось непосредственное вычисление корреляции \hat{M}_3 , являющейся камнем преткновения. Однако сопоставление этих расчетов с приведенными в [45] весьма затруднительно. Прежде всего это связано с тем, что наши расчеты корреляций касаются однородной турбулентности. В неоднородной же турбулентности корреляции $\langle \xi_j \rangle$, $\langle \xi_j \tilde{\partial}_j \xi_i \rangle$ не обращаются в нуль даже для негиротропной турбулентности (они ответственны за перенос поля) и поэтому дают вклад в искомую корреляцию \hat{M}_3 . В [132] они полагаются равными нулю. Поэтому мы можем трактовать этот расчет не столько как отрицательную магнитную диффузию, а как динамо (а само усиливающееся неоднородное магнитное поле — как собственную функцию растущего решения). Наконец, согласно (4.92) диффузия поля становится, вообще говоря, анизотропной и, как сказано в предыдущем подразделе, даже для высокопроводящей среды можно ожидать динамо, если турбулентность негиротропна.

Глава 5. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ НЕРАВНОВЕСИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТОКОВЫЕ СЛОИ

5.1. «Подводные камни» упрощенного подхода к вопросу формирования токовых слоев

Что называть токовыми слоями? Иногда ТС называют токовые системы или системы распределенных токов (в солнечной короне). Последние, конечно, не дают существенного нагрева плазмы. Чаще ТС путают с плазменными, естественно возникающими, если в основной плазме $\beta \ll 1$. Как говорилось в разд. 1.6, в местах, где $\mathbf{V} = 0$, происходит сжатие вещества, в результате чего устанавливается равновесие с более крутым (по сравнению с типичным) градиентом поля. Характерная толщина плазменного слоя δ_p (1.140) оказывается все же большой. Эффективной диссипации поля, однако, не происходит. Поэтому плазменный слой, как правило, не соответствует определению ТС, данному в разд. 2.7. Образование плазменного слоя проиллюстрировано на рис. 5.1: здесь происходит вытягивание силовых линий из-за пересоединения в лобовой точке магнитосферы (рис. 5.1, а) и переброса силовых линий в хвостовую часть (рис. 5.1, б). Последняя конфигурация (в вытянутом виде) характерна также для Солнца и называется стримером (рис. 5.2). В области выше основания стримера, т. е. выше точки B , должно установиться равновесие в виде простейшей конфигурации рис. 1.1. В окрестности штриховой линии устанавливается плазменный слой.

Часто используется представление о выходящем поле как о поршне. Казалось бы, благодаря ему расстояние между новым и старым полями будет сокращаться, т. е. будет формироваться ТС. Конечно, так и будет, если верхнее старое поле удерживать на месте. Каким образом это сделать? Концы силовых линий старого поля, правда, закреплены в фотосфере. Но вся конфигурация может растягиваться, давая место для выходящего нового поля. Есть ли основания считать, что ТС будет при этом формироваться? В такой постановке вопрос остается открытым.

Превращение X-точки в нулевую линию. Много результатов, касающихся ТС, получают в двумерной модели. Пусть

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\perp = \{0, B_y(y, z), B_z(y, z)\}. \quad (5.1)$$

Тогда вектор-потенциал в окрестности X-точки имеет вид $A_x = a^2 y^2 - b^2 z^2$ (X-точка расположена при $y = 0, z = 0$). Конфигурация изображена на рис. 5.3. Пусть в начальный момент поле потенциальное: $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, тогда $a = b$. При подъеме нового (горизонтального) поля это соотношение может измениться и конфи-

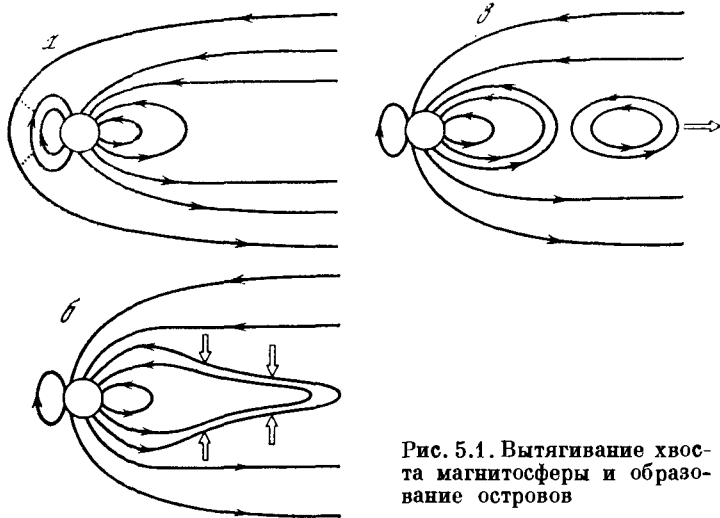


Рис. 5.1. Вытягивание хвоста магнитосферы и образование островов

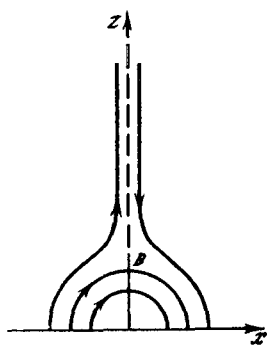


Рис. 5.2. Конфигурация типа стримера

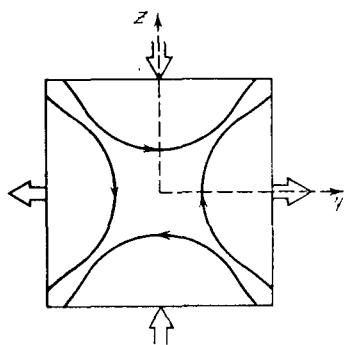


Рис. 5.3. Поле в окрестности X-точки

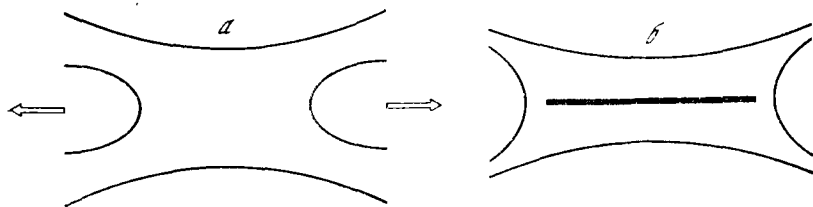


Рис. 5.4. Эволюция поля в окрестности X-точки

гурация примет вид (рис. 5.4, а), для которого $b > a$. Далее, казалось бы, боковые силовые линии, будучи сильно искривленными, стремятся распрямиться, вызывая движение, изображенное двойными стрелками на рис. 5.4, а. В результате X -точка должна превратиться в нулевую линию (где $\mathbf{V} = 0$, рис. 5.4, б). Однако это не очевидно, поскольку конфигурация рис. 5.4, а может находиться в равновесии и при $b \neq a$, т. е. удовлетворять уравнению (1.84) или, более конкретно, (1.88) ($A \equiv A_x$). Последнее удовлетворяется автоматически, если $P = P_0 + 2A (b^2 - a^2)/4\pi$, $P_0 = \text{const}$ (это решение было найдено еще Данжи [70]). В окрестности X -точки возникает распределенный ток, но не ТС.

Это решение реализуется, если плазменное давление не мало: в рассматриваемом поле (5.1) $B_x = 0$ и $P = p$. Для плазмы низкого давления $\beta \ll 1$ описанная эволюция, т. е. переход от конфигурации рис. 5.4, а к конфигурации рис. 5.4 действительно осуществляется. При $z = 0$ возникает ток. Но вопрос заключается в том, формируется ли при $z = 0$ ТС, или здесь возникает плазменный слой. «Локальный» подход, т. е. рассмотрение конфигурации только в окрестности X -точки, не дает ответа на этот вопрос.

При наличии продольного поля $B_x \neq 0$, а $\beta \ll 1$, осуществляется упомянутое решение Данжи: $P = B_x^2/8\pi$. Поле бессиловое с распределенными токами. Образуется ли нулевая линия или тем более ТС в рамках «локального» подхода, неизвестно.

Роль продольных электрических полей. Электрическое поле вызывает дрейф плазмы со скоростью $c [E\mathbf{V}]/B^2$. Если имеется составляющая \mathbf{E} , параллельная \mathbf{V} , или на некоторой линии $\mathbf{V} = 0$, то должен возникнуть сильный ток. Но, как видно из разд. 1.2, продольные электрические поля в «обычных» условиях весьма малы. Точнее, они такие, что величина продольных токов оказывается порядка дрейфовых, а последние, как сказано в разд. 1.6, очень малы.

Сконцентрируем внимание на окрестностях X - и O -точек. Прежде всего, нельзя считать, что при отсутствии продольного поля (как в (5.1)) частицы не замагничены. В окрестности X - и O -точек обычный радиус Лармора r_i заменяется на эффективный $\sqrt{r_i L}$ (L — характерный размер поля). Кроме того, быстрые частицы вообще «проскакивают» X - и O -точки, не успевая существенно ускориться в электрическом поле [392]. По этой причине точки не являются очень уж выделенными с точки зрения возникновения тока во внешнем электрическом поле. Главное же, электрическое поле, возникающее естественным образом, обращается согласно (1.66) в X - и O -точках в нуль (поскольку в них $\mathbf{V} = 0$). Например, если поднимающийся новый магнитный поток не создает ТС, а, как говорилось выше, заставляет подниматься старое поле обратного знака, то X -точка просто поднимается в атмосфере, а электрическое поле в ней нулевое. (Причем $\text{rot } \mathbf{E} \neq 0$ и $\partial_t \mathbf{V} \neq 0$ в этой точке!)

Волны. Обсудим поведение волновых возмущений в окрестности X - и O -точек в поперечном поле (5.1). Если имеется также и

продольное поле, т. е. $B_x \neq 0$, то эти точки не являются особыми. При $B_x = 0$ и $\beta \ll 1$ скорость звука c_s мала по сравнению с альвеновской c_A . Но последняя обращается в нуль в X - и O -точках. Иными словами, в окрестности этих точек упругость среды резко снижена, т. е. точки являются особыми. Можно ожидать, что амплитуда МГД-волны в этих точках (если она вообще до них дойдет, а не отразится раньше) резко возрастет. Грубо говоря, $u_1^2 c_A = u_2^2 c_s$ (u_1 — амплитуда в основной области, u_2 — в нулевой точке). При не слишком малой амплитуде u_2 возмущение становится ударным в нулевой точке. Все же плотность здесь возрастает не больше, чем в плазменном слое. Поэтому возникновение ТС не очевидно.

Вынужденное возбуждение ТС. При численном счете граничной задачи в квадрате на рис. 5.3 на границе можно задать движение так, как показано двойными стрелками (или, что эквивалентно, задать здесь электрическое поле $E = \{E_x, 0, 0\}$, $E_x > 0$). Тогда, конечно, будет происходить эволюция, как на рис. 5.4, и ТС сформируется. Аналогично можно моделировать выход (снизу) нового потока, если старый (верхний) фиксирован граничными условиями. Фактически это будет модель поршня, упомянутая выше. Хотя движение задано только на границе, в отличие от примера Пв разд. 2.7, где скорость задана во всем объеме, формирование ТС здесь вынужденное: у поля нет другого выхода. В окрестности X -точки сформируется течение типа (2.145), не приводящее к усилению поля (в отличие от (2.144), пример II).

Аномальные явления в предельно разреженной плазме. В принципе можно представить плазму с предельно низким значением β , так что токовая скорость u_d оказывается порядка тепловой u_{Ti} даже при большом характерном размере L . Согласно (1.134) для этого $\beta \ll r_i/L$. Или — в другом варианте — в системе появляется плазменный слой, но начальное $\beta = \beta(0)$ настолько мало, что толщина $\delta_p < r_i$, т. е. $u_d \geq u_{Ti}$. Пользуясь (1.140) с учетом (1.137), (1.138), видим, что для этого $\beta(0)^{2/\gamma} < r_i/L$. Эти две оценки практически совпадают, так как $2/\gamma \approx 1$.

В такой плазме легко создать сильный продольный (вдоль магнитного поля) ток, так как токовая скорость его порядка дрейфовой (см. разд. 1.2). Кроме того, как говорилось выше, в месте, где $\mathbf{V} = 0$, будет происходить сжатие, приводящее к формированию плазменного слоя, в данном случае являющегося и токовым, поскольку при $u_d \geq u_{Ti}$ включается аномальная диссипация (см. разд. 2.7). Плазма описанного вида явилась бы благодатной средой для всякого рода диссипационных процессов. В ней нарушается вмороженность и, по-видимому, нетрудно вызвать бурное энерговыделение (типа солнечной вспышки). Однако, как правило, условие $\beta \ll r_i/L$ не выполняется в солнечной плазме. Скорее всего это связано с нестабильностью самой плазмы. Действительно, любые МГД-возмущения с амплитудой b , такой, что $b \geq B\lambda/L$ (λ — длина волны, при $\lambda/L \ll 1$ это условие легко выполняется), сопровождаются столь мощными токами, что токовые скорости превос-

ходят тепловые. Это означает, что возбуждаемая при этом плазменная турбулентность приведет к нагреву плазмы, в результате чего β возрастет и условие $\beta \ll r_i/L$ нарушится. Об этом обстоятельстве следует помнить, когда оценки (неизбежно грубые в астрофизике и зависящие от многих входящих параметров) все же предсказывают появление больших токовых скоростей без всяких ТС.

5.2. Магнитные нулевые точки и пересоединение силовых линий

Способы изменения топологии магнитного поля. В окрестности нулевой точки может происходить изменение топологии поля. Для разъяснения этого понятия напомним, что топологическая эквивалентность связана с гомеоморфизмом (непрерывно дифференцируемым отображением). Моффат [321] предложил понятие топологической достижимости: две конфигурации V_1 , V_2 называются топологически достижимыми, если существует движение, переводящее V_1 в V_2 и наоборот, причем переход описывается уравнением (1.64). Иначе говоря, изменение поля происходит без нарушения вмерзженности. Отметим, что непрерывно дифференцируемая скорость плазмы может привести к нарушению гомеоморфизма (при сохранении вмерзженности). Например, движение (2.145) приводит к укрупнению градиента поля, как на рис. 2.3, а при $t \rightarrow \infty$ сформируется скачок. В то же время движение, а также начальные условия непрерывны.

Будем считать, что конфигурации V_1 и V_2 обладают разной топологией, если они не являются топологически достижимыми. А если происходит переход от V_1 к V_2 , то будем говорить об изменении топологии поля. Последнее является следствием омической диссипации.

Опишем несколько процессов, приводящих к изменению топологии. Прежде всего, это пересоединение силовых линий: конфигурация рис. 1.1 переходит в конфигурацию рис. 5.5, а. Эти две конфигурации обладают разной топологией. Действительно, они описываются A_x -компонентой вектор-потенциала и подчиняются в случае сохранения вмерзженности уравнению (1.129). На нулевой линии (где $V_\perp = 0$) функция $A_x(y, z)$ принимает максимальное (или минимальное) значение. Любые движения только переносят A_x из одной точки в другую (см. (1.129)), поэтому они могут только деформировать нулевую линию и не способны вызвать пересоединение, т. е. перехода к конфигурации рис. 5.5, а.

При наличии V_x -составляющей нулевая линия $V_\perp = 0$ сохраняется, но полное поле V на ней не обращается в нуль. Динамика V_\perp -составляющей при пересоединении остается прежней, т. е. представляет собой переход от конфигурации рис. 1.1 к конфигурации рис. 5.5, а. А полное поле меняется при этом так, как изображено на рис. 5.5, б, в.

Вторым процессом является исчезновение силовых линий. Так, например, они могут просто сливаться (или «аннигилировать») на

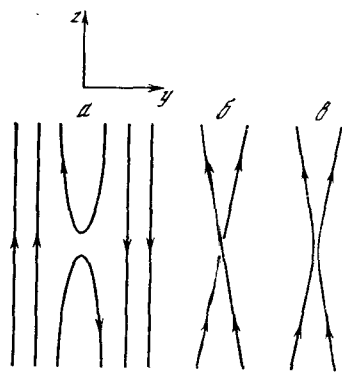


Рис. 5.5. Пересоединение силовых линий

$$\partial_t \int_{-L}^L B_z dy = \eta (\partial_y B_z |_{y=L} - \partial_y B_z |_{y=-L}) < 0,$$

т. е. магнитный поток уменьшается. Аналогично для осесимметричного поля в проводящем шаре, помещенном в вакуум. На границе $B_\varphi = 0$ и имеется поток магнитной энергии в вакуум, равный $\eta \partial_r B_\varphi$. Он приводит к диссипации поля за счет исчезновения силовых линий на границе.

Будем называть конфигурации разной топологии \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 диссипативно достижимыми, если переход от \mathbf{V}_1 к \mathbf{V}_2 может осуществиться за счет диссипации (т. е. пересоединения или исчезновения силовых линий). Очевидно, можно придумать пример двух конфигураций, которые не могут перейти друг в друга ни при сохранении вмороженности (т. е. они не являются топологически достижимыми), ни при учете диссипации (тем самым они не являются диссипативно достижимыми).

5.3. Топологическое неравновесие (магнитное неравновесие). Тороидальные поля

Понятие топологического неравновесия. Очевидно, не каждая начальная магнитная конфигурация \mathbf{V}_1 находится в равновесии, т. е. удовлетворяет уравнению (1.84). Несбалансированная сила вызовет движение плазмы с вмороженным в нее полем. В результате конфигурация может перейти к равновесию \mathbf{V}_2 (или в идеальной среде будут происходить колебания вокруг равновесного состояния).

Будем называть конфигурацию \mathbf{V}_1 топологически неравновесной, если соответствующее топологически достижимое равновесное состояние \mathbf{V}_2 не является гладким (т. е. содержит скачки поля) или вообще нет топологически достижимого равновесия.

оси $y = 0$ (см. рис. 1.1), причем симметрия (т. е. независимость поля от z) сохраняется.

Наконец, поучительным примером является исчезновение силовых линий на границе с вакуумом. В этом можно убедиться, рассматривая проводящую полосу $-L < y < L$, вне которой вакуум (или изолятор). Пусть начальное поле $\mathbf{V} = \{0, 0, B_z(y)\}$ распределено так, что $B_z(y)$ не меняет знака (пусть для определенности $B_z > 0$). Для вакуумных границ $B_z = 0$ при $y = \pm L$, поэтому

Модель вязкой среды. Для того чтобы отвлечься от колебаний вокруг равновесия, в [321] предложена модель вязкой, но идеально проводящей плазмы (модель ВИП). Это означает, что все колебательные процессы быстро подавляются вязкостью. Но идеальная проводимость не позволяет изменения топологии магнитного поля. Таким образом, полная энергия системы W монотонно уменьшается (в отличие от (1.101)). Чаще всего будем ограничиваться несжимаемыми движениями, возникающими при наличии начального неравновесного состояния V_1 . Тогда магнитная энергия W_m в модели ВИП тоже монотонно уменьшается. Причем возможна ситуация, когда $W_m \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, которая означает, что нет топологически достижимого равновесия. В других случаях $W_m \rightarrow W_m(\infty)$, т. е. равновесие достигается. Если конечная конфигурация гладкая, т. е. V_2 — гладкая функция, то начальная является топологически равновесной; если содержит скачки, то начальная — топологически неравновесная.

Условие на скачке имеет вид

$$\{B_{\perp}^2/8\pi + P\} = 0 \quad (5.2)$$

(см. [113]). Давление P постоянно с каждой стороны от разрыва, так как $P = \text{const}$ на каждой силовой линии. Поэтому (5.2) переписывается в виде

$$B_{\perp}^2(+)/8\pi - B_{\perp}^2(-)/8\pi = P(-) - P(+). \quad (5.3)$$

Левая часть (5.3) постоянна вдоль разрыва, поскольку правая часть постоянна, но величина $B_{\perp}(+) - B_{\perp}(-)$ меняется вдоль разрыва.

Как осуществляется топологическое неравновесие? На первый взгляд кажется, что топологическое неравновесие — это экзотика. В действительности же она является, по-видимому, главной причиной формирования ТС в космических условиях. В настоящее время известны три способа осуществления топологического неравновесия.

1. Топологическое неравновесие начального поля. Например, топология выходящего из фотосферы в корону магнитного поля может обладать таким свойством. В короне кинетическая энергия мала по сравнению с магнитной, поэтому поле стремится прийти в равновесие (содержащее скачки).

2. Потеря равновесия из-за изменения граничных условий. Например, движение оснований магнитных арок приводит к срыву первоначально равновесных в короне полей.

3. Потеря равновесия из-за резистивных неустойчивостей. Начальная конфигурация равновесна, но неустойчива. Происходит слабое пересоединение силовых линий с небольшим изменением топологии (т. е. V_2 слабо отличается от V_1). Новое состояние оказывается топологически неравновесным (т. е. на языке устойчивости: невозможна слабонелинейная релаксация). Система «не успокоится» до тех пор, пока не перейдет в новое, уже устойчивое равновесие.

Тороидальные поля. В качестве простейшего примера топологического неравновесия начального поля рассмотрим тороидальное поле $\mathbf{V} = \{0, B_\varphi(s, z), 0\}$ (в цилиндрической системе (s, φ, z)). Для равновесия электромагнитная сила (правая часть (1.84)) должна быть потенциальной, поскольку давление (левая часть) может скомпенсировать только такую силу. Между тем данное поле вызывает, вообще говоря, непотенциальную силу (см., например, [132]):

$$\frac{1}{4\pi} \text{rot} [\text{rot} \mathbf{V}, \mathbf{V}] = \left\{ 0, \frac{1}{4\pi s} \partial_z B_\varphi^2, 0 \right\}. \quad (5.4)$$

Равновесие возможно, если правая часть (5.4) обращается в нуль, т. е. если B_φ не зависит от z .

В общем случае тороидального начального поля сила возбуждает движение плазмы в виде меридиональной циркуляции: $\mathbf{u} = \{u_s, 0, u_z\}$. Движение не возбуждает B_s - и B_z -составляющих, т. е. сохраняет тороидальный характер поля. Рассмотрим начальный тор, симметричный относительно экватора (в плоскости $z = 0$), т. е. $B_\varphi(z) = B_\varphi(-z)$. Восстанавливая непотенциальную составляющую силы, получим схематическую картину линий тока (рис. 5.6). Поле B_φ/s переносится к оси z , а растекание плазмы вдоль этой оси приводит к растяжению конфигурации. Поле все более и более приближается к цилиндрической форме, масштаб растет вдоль оси z и уменьшается по s . Магнитная энергия тоже уменьшается и при $t \rightarrow \infty W_m \rightarrow 0$, все силовые линии сливаются в точки.

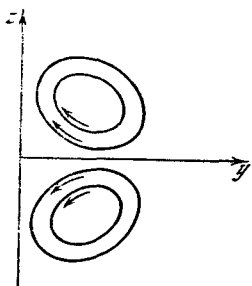


Рис. 5.6. Меридиональная циркуляция, возникшая при действии тороидального поля

В [321] рассматривается поведение тороидального поля в ограниченном проводящем теле, а именно в цилиндре, ограниченном по z плоскостями $z = \pm a$. Тогда в равновесном состоянии, $\partial_z B_\varphi = 0$, тор превратился в цилиндр, размер которого ограничен по z самим проводящим цилиндром. Если вне цилиндра вакуум, то на поверхности $B_\varphi = 0$. Это означает, что поле переходит скачком от своего значения при $|z| < a$ к нулю на $|z| = a$. Таким образом, тороидальное поле оказалось топологически неравновесным: в топологически достижимом равновесии \mathbf{V}_2 имеются скачки или разрывы поля при $z = \pm a$.

Общая картина эволюции поля не изменится, если рассматривать тороидальное поле в проводящем шаре (вне которого вакуум). Тогда равновесие ($\partial_z B_\varphi = 0$ всюду) тоже невозможно. ТС образуется в районе полюсов. Еще одно усложнение модели заключается в рассмотрении антисимметричных относительно экватора $z = 0$ полей B_φ :

$$B_\varphi(s, z) = -B_\varphi(s, -z). \quad (5.5)$$

Именно такие поля вытягиваются дифференциальным вращением из полоидального (см. рис. 3.2, б). В этом случае вихревая составляющая меридиальной циркуляции будет иметь не две конвективные ячейки, как на рис. 5.5, а четыре. Две из них, прилегающие к полярным областям, переносят поле на полюсы. Другие две переносят тороидальное поле к экватору. В идеально проводящей среде устанавливается равновесное состояние $\partial_z B_\varphi = 0$ всюду, но на полюсах B_φ скачком обращается в нуль, а на экваторе скачком меняет знак. В реальной высокопроводящей среде на полюсах и на экваторе формируются ТС [46].

5.4. Основные свойства равновесия при наличии нулевых линий

Большое значение имеет изучение двумерных конфигураций: зависимость только y и z . В общем случае поле имеет продольную $\mathbf{V}_\parallel = \{B_x(y, z), 0, 0\}$ и поперечную \mathbf{V}_\perp (5.1) составляющие. Нулевой линией называем кривую в плоскости yz , на которой $\mathbf{V}_\perp = 0$ (правильнее было бы называть это нулевой поверхностью: именно на поверхности трехмерного пространства $\mathbf{V}_\perp = 0$, но, поскольку здесь, вообще говоря, $B_x \neq 0$, такой термин мог ввести в заблуждение). Равновесное состояние (1.88) описывается эллиптическим уравнением. На нулевой линии $\mathbf{V}_\perp = 0$, т. е. $\nabla A = 0$. Здесь, конечно, содержится избыточное граничное условие: на нулевой линии $A = \text{const}$ (задача Дирихле, так как без ограничения общности можно положить константу равной нулю) и $\partial_n A = 0$ (задача Неймана). Естественно ожидать, что это обстоятельство приведет к вырождению решения. И действительно в ряде случаев только одно присутствие нулевой линии однозначно определяет геометрию (или топологию) поля конфигурации. В двух случаях, описанных ниже, наличие нулевых линий вынуждает равновесное решение быть одномерным (т. е. зависеть только от одной координаты).

Нулевая линия в виде отрезка прямой. Пусть на отрезке $y = 0$, $-a \leq z \leq a$, $B_y = B_z = 0$, т. е. на нем $A (\equiv A_x) = A_0 = \text{const}$ (т. е. $\partial_z A = 0$) и $\partial_y A = 0$. Поэтому в окрестности $y = 0$

$$A = A_0 + A_2 y^2 + A_3 y^3 + A_4 y^4 + \dots \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в (1.88), имеем для разных степеней y

$$2A_2 = f(A_0), \quad 3 \cdot 2A_3 = 0, \quad 4 \cdot 3A_4 = f'(A_0) A_2, \dots \quad (5.7)$$

Отсюда последовательно получаем: A_2, A_3, A_4 не зависят от z . Поэтому решение не зависит от z в полосе $-a \leq z \leq a$.

Итак, вид решения в полосе $-a \leq z \leq a$ известен. Обратимся к решению вне полосы. Рассмотрим полупространство $z > a$ (для $z < -a$ все рассуждения аналогичны). Представим решение в виде

$$A = \bar{A}_0 + \bar{A}_1(z - a) + \bar{A}_2(z - a)^2 + \bar{A}_3(z - a)^3 + \dots, \quad (5.8)$$

где \bar{A}_n — функция от y . Поскольку $B_y(z = a) = 0$, имеем $\bar{A}_1 = 0$. Подставим (5.8) в (1.88), тогда в нулевом приближении по

$(z - a)$ получаем $\bar{A}_0 + 2\bar{A}_2 = f(\bar{A}_0)$. Учитывая, что при $z < a$ соответствующее соотношение имеет вид $\bar{A}_0 = f(\bar{A}_0)$ и то, что согласно (1.88) $f(A)$ не меняется вдоль силовой линии, получим $\bar{A}_2 = 0$. Далее, для растущих степеней $(z - a)$ получаем последовательно: $\bar{A}_3 = 0$ и т. д. Следовательно, A не зависит от z во всем пространстве, зависит только от y , т. е. решение одномерно.

Общий вывод: если конфигурация содержит нулевую линию в виде отрезка прямой, то равновесие возможно только в виде прямых силовых линий (параллельных этому отрезку).

Нулевая линия в виде дуги. Выпишем (1.88) в полярной системе (s, φ) с центром, совпадающим с центром окружности данной дуги:

$$\partial_s \partial_s A + s^{-1} \partial_s A + s^{-2} \partial_\varphi \partial_\varphi A = f(A). \quad (5.9)$$

Дуга расположена при $s = a$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Здесь $A = A_0 = \text{const}$ и $\partial_s A = 0$. Раскладывая A в секторе $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ подобно (5.6) ($A = A_0 + A_2(s - a)^2 + A_3(s - a)^3 + \dots$) и подставляя это выражение в (5.9) получим (аналогично (5.7)), что все коэффициенты A_2, A_3 и т. д. не зависят от φ . Далее, разложение вне этого сектора (аналогично (5.9) $A = \bar{A}_0 + \bar{A}_1\varphi + \bar{A}_2\varphi^2 + \bar{A}_3\varphi^3 + \dots$) показывает, что $\bar{A}_1 = \bar{A}_2 = \bar{A}_3 = \bar{A}_4 = 0$.

Таким образом, нулевая линия в виде дуги навязывает осевую симметрию всей конфигурации.

Магнитное неравновесие стримера. Стример (см. рис. 5.2) содержит нулевую линию в виде прямой (штриховая). Согласно сказанному выше, равновесное поле имеет вид прямых силовых линий. Но как видно из рис. 5.2, база стримера (ниже точки B) не позволяет этому равновесию осуществиться. Итак, соображения о локальном равновесии выше точки B , приведенные в разд. 5.1, говорят о том, что на нулевой линии должен установиться плазменный слой (так как $\beta \ll 1$). А требование равновесия во всей области приведет к тому, что на штриховой линии рис. 5.2 устанавливается ТС. Дело в том, что топологически достижимым равновесием является поле со скачком на штриховой линии. А в реальной высокопроводящей среде в этом же месте устанавливается ТС.

Образование ТС при эволюции поля в окрестности X -точки. Как говорилось в разд. 5.1, в плазме низкого давления формируется плазменный слой при медленном изменении граничных условий (см. рис. 5.4). Может ли конфигурация рис. 5.4, б находиться в равновесии? Ответ на этот вопрос отрицательный. Действительно, поскольку согласно (1.88) давление вдоль силовой линии постоянно, последняя не может пересекать плазменный слой (где давление резко растет). Значит, здесь имеется нулевая линия в виде отрезка прямой, т. е. равновесие одномерно. Но топология всей конфигурации такова, что она не может реализоваться в виде прямых силовых линий.

На рис. 5.7 приведены еще два примера топологического неравновесия, возникающего из-за изменения граничных условий. Последнее заключается в выходе нового магнитного потока на фоне

старого с обратным знаком (см. [295]). Для плазмы низкого давления, $\beta \ll 1$ (солнечной короны), в окрестности нейтральной линии (где $\mathbf{V} = 0$) неизбежно формирование плазменного слоя (см. разд. 1.6). Силовые линии сближаются в окрестности нейтральной области, но закрепленность их в основании фотосферы не дает им такой возможности прямо над фотосферой (см. рис. 5.7). В результате плазма стекает с «вершины» нейтральной линии и плазменный слой превращается в ТС.

На неизбежность возникновения ТС для плазмы низкого давления в конфигурации поля, показанной на рис. 5.3, 5.4, впервые

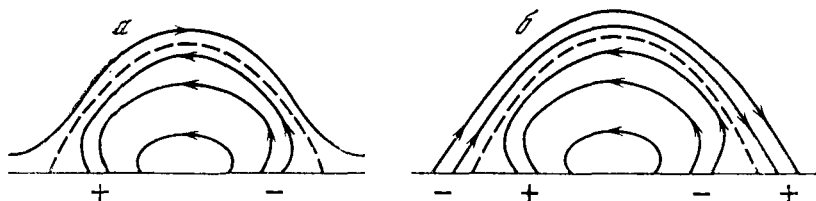


Рис. 5.7. Формирование нейтральной линии (штриховая) и ТС при выходе нового магнитного потока на фоне квазиоднородного старого (а) и в виде старой группы пятен (б)

было указано Сыроватским [157]. Этот пример, а также пример со стримером (см. рис. 5.2) и пример, приведенный на рис. 5.7, иллюстрируют особые возможности плазмы низкого давления в формировании ТС.

Одна из причин образования магнитных островов в тороидальных установках. В [269] указывалось на возможность перестройки топологии поля из-за неровности границ (в токамаке). Конфигурация моделировалась в виде двумерной (зависимость только от y и z). В [269] рассматривалось слабое (синусоидальное) возмущение. Расчеты показывают, что в окрестности оси z возникают магнитные острова. Можно сформулировать эти результаты на языке магнитного неравновесия (автоматически обобщая результат [269] на неслабые нелинейные возмущения). В самом деле, при изменении формы границы, как на рис. 5.8, поле вынуждено зависеть от z . Но равновесие с нулевой линией (см. рис. 5.8, штриховая линия) должно быть одномерным (т. е. зависеть только от y). Поэтому на оси z неизбежно формируется ТС, происходит диссипация и топология конфигурации меняется, а именно: возникают магнитные острова, а нулевая линия исчезает.

В заключение полезно понять, почему мы выделяем именно нулевые линии. Ведь если на прямой или дуге $\mathbf{V}_\perp = \text{const} \neq 0$, то все выводы не меняются. Дело заключается в том, что нулевая линия сохраняется в топологически достижимой конфигурации (см. разд. 5.3). Например, любые движения и деформации сохранят нулевую линию стримера (см. рис. 5.2). Но если бы поле выше точки B не меняло знак, то предположение $\mathbf{V}_\perp = \text{const}$ на штриховой линии, например, было бы неоправданным. Действительно

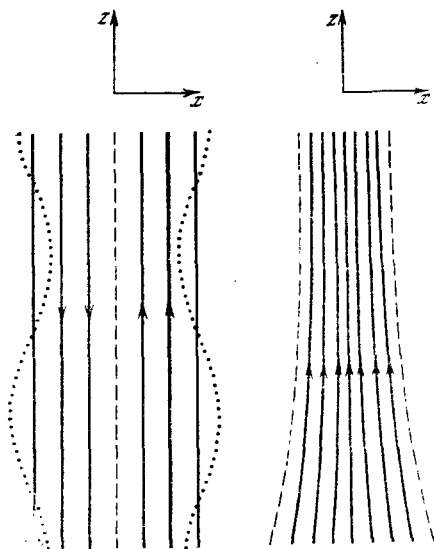


Рис. 5.8. Возмущение границ плазмы (пунктир) с магнитным полем, содержащим нулевую линию

Рис. 5.9. Конфигурация с двумя нулевыми линиями (штриховые)

ричную относительно оси z в виде тонкой магнитной трубки (рис. 5.9). На нулевой линии $B_y = B_z = 0$, и соотношение $b \ll 1$ выполняется всюду, кроме нулевой линии. Равновесное решение удовлетворяет (1.88). Воспользуемся разложением (5.8) в окрестности произвольной точки $z = a$, подставим его в (1.88). Собирав члены нулевой и первой степени по $(z - a)$, имеем

$$\ddot{A}_0 + 2\ddot{A}_2 = f(\ddot{A}_0), \quad (5.11)$$

$$\ddot{A}_1 + 6\ddot{A}_3 = f'(\ddot{A}_0) \ddot{A}_1. \quad (5.12)$$

Согласно второму соотношению (5.10) в (5.11), (5.12) можно пренебречь величинами \ddot{A}_2 и \ddot{A}_3 . Тогда из (5.11) следует $\ddot{A}_0'' = f(\ddot{A}_0)$, $-\ddot{B}_z'' = \ddot{A}_0''' = -f(\ddot{A}_0) \ddot{B}_z$. А (5.12) приобретает вид

$$\ddot{B}_y'' = \ddot{B}_y \ddot{B}_z'' / \ddot{B}_z. \quad (5.13)$$

Отметим, что искомое уравнение (5.13) получается также из точного

$$\ddot{B}_z \Delta \ddot{B}_y = \ddot{B}_y \Delta \ddot{B}_z \quad (5.14)$$

при учете второго уравнения (5.10) (откуда следует $\Delta \approx \partial_y \partial_y$). Само уравнение (5.14) получается, если исключить давление из (1.84), т. е. взять от него rot. Граничными условиями для

здесь $B_y = 0$, но $B_z \neq \text{const}$ (и, как можно ожидать, убывает с высотой).

5.5. Потеря равновесия вытянутых магнитных конфигураций

Будем называть двумерную конфигурацию вытянутой (вдоль оси z), если силовые линии поля B_{\perp} почти параллельны оси z . В этом случае выполняются оценочные неравенства:

$$b = B_y / B_z \ll 1, \quad \partial_z \ll \partial_y, \\ L_y \ll L_z. \quad (5.10)$$

Все величины здесь характерные; L_y , L_z — масштабы изменения полей по осям y и z .

Равновесие тонких трубок.

В качестве примера рассмотрим конфигурацию, симметричную относительно оси z в виде тонкой магнитной трубки

(рис. 5.9). На нулевой линии $B_y = B_z = 0$, и соотношение $b \ll 1$ выполняется всюду, кроме нулевой линии. Равновесное решение удовлетворяет (1.88). Воспользуемся разложением (5.8) в окрестности произвольной точки $z = a$, подставим его в (1.88). Собирав члены нулевой и первой степени по $(z - a)$, имеем

$$\ddot{A}_0'' + 2\ddot{A}_2 = f(\ddot{A}_0), \quad (5.11)$$

$$\ddot{A}_1'' + 6\ddot{A}_3 = f'(\ddot{A}_0) \ddot{A}_1. \quad (5.12)$$

Согласно второму соотношению (5.10) в (5.11), (5.12) можно пренебречь величинами \ddot{A}_2 и \ddot{A}_3 . Тогда из (5.11) следует $\ddot{A}_0'' = f(\ddot{A}_0)$, $-\ddot{B}_z'' = \ddot{A}_0''' = -f(\ddot{A}_0) \ddot{B}_z$. А (5.12) приобретает вид

$$\ddot{B}_y'' = \ddot{B}_y \ddot{B}_z'' / \ddot{B}_z. \quad (5.13)$$

Отметим, что искомое уравнение (5.13) получается также из точного

$$\ddot{B}_z \Delta \ddot{B}_y = \ddot{B}_y \Delta \ddot{B}_z \quad (5.14)$$

при учете второго уравнения (5.10) (откуда следует $\Delta \approx \partial_y \partial_y$). Само уравнение (5.14) получается, если исключить давление из (1.84), т. е. взять от него rot. Граничными условиями для

(5.13) являются $B_y (\pm L_y) = 0$. Выпишем полное решение (5.13):

$$B_y' = C_1 B_z (y) + C_2 B_z (y) \int_0^y B_z^{-2} (y') dy', \quad (5.15)$$

где C_1, C_2 — константы. Для нахождения их воспользуемся граничными условиями. Поскольку $C_1 B_z (\pm L_y) = 0, C_2 = 0$. Дело в том, что второе слагаемое не обращается в нуль на границе при $C_2 \neq 0$. В самом деле, в окрестности $y = \pm L$ можно записать $B_z = B_n (\pm L_y - y)^n$ и второе слагаемое $\sim C_2/B_n (\pm L_y - y)^{n-1}$, B_y -составляющая не должна иметь особенности, поэтому $n \leq 1$. Но при $n < 1$ величина $\partial_y B_z$, т. е. ток, обращается в бесконечность. Единственное решение без особенности при $n = 1$. Тогда второе слагаемое $\sim C_2/B_n \neq 0$.

Итак, $C_2 = 0$, а решение $C_1 B_z$ не обладает должной симметрией: $C_1 B_z (y) = C_1 B_z (-y)$, в то время как B_y должно быть нечетным по y (см. рис. 5.9). Поэтому и $C_1 = 0$. Вывод следующий: у уравнения (5.13) нет нетривиальных решений. Поскольку оно рассматривалось на произвольной прямой $z = a$, $B_y \equiv 0$ всюду. Следовательно, тонкая трубка (см. рис. 5.9) может находиться в равновесии только в виде одномерной конфигурации.

Рассмотренный случай без труда обобщается на осесимметричную магнитную трубку: можно считать, что на рис. 5.9 изображена полоидальная составляющая поля $\{B_s, 0, B_z\}$ (в цилиндрической системе (s, φ, B_φ)). Осевая симметрия означает, что $\partial_\varphi = 0$. Если $B_s = B_z = 0$ на некой граничной поверхности вращения, то $B_s = 0$ и равновесная конфигурация одномерная: зависит только от s [47], а магнитные поверхности представляют собой цилиндры.

Вытянутые конфигурации без нулевых линий. Обратимся к конфигурации рис. 5.1, б, более конкретно — к хвостовой части магнитосферы Земли. В отличие от стримера, изображенного на рис. 5.2, здесь отсутствует нулевая линия (по крайней мере в области, близкой к Земле, именно она нас и будет интересовать). В плазменном слое, где B_z -компонента мала, имеется поперечное поле $B_y \neq 0$. По этой причине на оси z первое соотношение (5.10) не выполняется, зато выполняются второе и третье, а первое выполняется для характерных величин. Следовательно, приближение вытянутого поля применимо.

Основное уравнение для возмущений (5.13) остается в силе. Оно может быть, в частности, получено из точного условия равновесия (5.14). Действительно, для основного поля, т. е. B_z -составляющей, очевидно, что $\Delta B_z \approx B_z''$. Это же соотношение применимо для B_y -составляющей: $\Delta B_y \approx B_y''$ (см. рис. 5.1, б). Отсюда возвращаемся к (5.13). Отметим, что само уравнение (5.13) не содержит особенностей: хотя при $y = 0$ $B_z = 0$, здесь же и $B_z'' = 0$. Например, для обычно рассматриваемого слоя Харриса (1.139) $B_z'/B_z = -2/L^2 \operatorname{ch}^2 (y/L)$ и при $y = 0$ $B_z''/B_z = -2/L^2$. Воспользуемся решением (5.15), слегка модифицировав его. Прежде всего, в нем

$C_1 = 0$, поскольку B_y должно быть четной функцией y , в то время как B_z — нечетная (см. рис. 5.1, б). Интеграл во втором слагаемом на этот раз смысла не имеет из-за расходимости при $y = 0$. Выпишем его в виде

$$B_y = \frac{1}{2} C_2 B_z(y) \left[\int_p^y dy' / B_z^2(y') - \int_p^{-y} B_z^{-2}(y') dy' \right], \quad p > 0. \quad (5.16)$$

Например, для профиля (1.139) получим

$$B_y = C_2 B_\infty^{-1} (y \operatorname{th}(y/L) - L). \quad (5.17)$$

Решение (5.16), (5.17) обладает должной симметрией: оно четно по y . Существенно, что при $|y| > L$ оно линейно растет (это видно из (5.17) непосредственно) и является общим свойством решения (5.16), поскольку B_z асимптотически выходит на константу при $|y| > L$: $B_z \rightarrow B_\infty$.

Рост поля при больших $|y|$ накладывает суровое ограничение на само возмущение и приводит к необходимости ввести две характерные величины, определяющих возмущение:

$$b = B_y(0)/B_\infty, \quad \varepsilon = B_y(L_1)/B_\infty. \quad (5.18)$$

Здесь введен масштаб L_1 : конфигурация ограничена поверхностями $y = \pm L_1$ (границы магнитосферы, см. рис. 5.1). Согласно (5.16), (5.17) получим

$$b = \varepsilon L/L_1, \quad \varepsilon = b L_1/L. \quad (5.19)$$

Для вытянутой конфигурации должно выполняться: $b \ll 1$ и $\varepsilon \ll \ll 1$. Важность соотношений (5.19) видна, если оценить параметры хвоста магнитосферы. Можно задать ε , пользуясь экспериментальными данными о расширении хвоста (flaring). Они дают $\varepsilon = 0,1$, кроме того, $L/L_1 = 0,1$, поэтому $b = 0,01$. Эта величина значительно меньше принимаемого значения $b = 0,1$. Последнее получается, если оценить b как $b = L/L_z$ (в свою очередь, следующее из оценки уравнения $\operatorname{div} \mathbf{B}_\perp = 0$). Если же, наоборот, задать $b = 0,1$, то согласно (5.19) ε близко к единице, т. е. силовые линии на границе магнитосферы ($y = \pm L_1(z)$) слишком сильно расходятся. Это видно, между прочим, и из численного счета модели хвоста магнитосферы [196, 174].

Вернемся теперь к эволюции поля (см. рис. 5.1). Ясно, что конфигурация с $L_z = L$ (см. рис. 5.1, а) не является вытянутой и она равновесна (в виде потенциального поля). Когда длина хвоста L_z становится много большей L (см. рис. 5.1, б), скажем $L_z = 10 L$, конфигурация может быть классифицирована как вытянутая. Если бы при этом $b = 0,1$ (как изображено на рис. 5.1, б: силовые линии равномерно пересекают ось z от $z = 0$ до $z = L_z$), то согласно (5.19) вся магнитосфера значительно расширилась бы. Этому, по-видимому, препятствует набегающий солнечный ветер, и расширение незначительно ($\varepsilon = 0,1$). Поэтому равновесие осуществляется в виде силовых линий, почти параллельных оси z .

В области замкнутых силовых линий они практически не пересекают ось z во всей области $0 < z < L_z - L'$, $L' \approx L$. И только в области «вершины» замкнутых силовых линий они пересекают ось z . Здесь $B_y \approx B_z$, поле не является вытянутым и такое равновесие возможно. Такое состояние, однако, неустойчиво по отношению к тирингу (см. разд. 2.9), что приводит к появлению островов. Для них второе условие (5.10) не выполняется, они вытянуты вдоль оси z , и такое равновесие (с островами) возможно. Видимо, именно магнитные острова объясняют наблюдаемое поперечное поле B_y .

5.6. Бессилловые поля

Теорема вириала. Сила $[\text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{V}]$ может быть представлена в виде $\partial_j (B_i B_j - 1/2 B^2 \delta_{ij})$. Для бессиллового поля она обращается в нуль:

$$0 = x_i \partial_j (B_i B_j - 1/2 B^2 \delta_{ij}) = (\partial_j x_i - \delta_{ij}) (B_i B_j - 1/2 B^2 \delta_{ij}). \quad (5.20)$$

Интегрирование первого слагаемого в круглой скобке по всему объему дает нуль, поскольку он преобразуется в поверхностный интеграл и $B^2 \sim O(1/r^2)$ (что необходимо для сходимости энергии). Второе слагаемое поэтому дает $1/2 \int B^2 dx = 0$, т. е. $\mathbf{V} \equiv 0$. Отсюда следует, что бессилловое поле не может быть таковым во всем пространстве [170]. Оно может занимать часть объема, вне которого существуют силы, удерживающие его.

Нас будут интересовать конфигурации, которые являются бессилловыми только в полупространстве $z > 0$. Силовые линии закреплены при $z = 0$ (фотосфера), где поле не является бессилловым.

Неадекватность описания бессилловых полей с постоянной α . Решение (1.91) с $\alpha = \text{const}$ является наиболее изученным, но реально оно представляет лишь методический интерес для астрофизики. Дело в том, что эта конфигурация обладает бесконечной энергией. Действительно, с учетом $\text{div } \mathbf{V} = 0$ (1.91) преобразуется в $\Delta \mathbf{V} + \alpha^2 \mathbf{V} = 0$, решение которого имеет асимптотический вид $B^2 \sim r^{-2} \sin^2 \alpha r$. Энергия расходится пропорционально: $\int r^{-2} \sin^2(\alpha r) r^2 dr \rightarrow r$ [125]. Методически полезно сопоставление с осесимметричным случаем. При этом $B_\varphi \sim J_1(\alpha s)$, $B_z \sim J_0(\alpha s)$, т. е. при больших s $B^2 \sim s^{-1} \sin^2 \alpha s$. Энергия расходится: $\int s^{-1} \sin^2(\alpha s) s ds \rightarrow s$. Заметим, что расходимость $\sim s$ является фатальной для любой модификации осевой симметрии. Для сравнения: для поля прямого тока $B_\varphi \sim 1/s$, т. е. $B^2 \sim 1/s^2$ и $\int s^{-2} s ds \rightarrow \ln s$. Логарифмическая расходимость является минимальной. Поэтому для любого ограниченного тока (например, имеющего форму кольца) закон $B \sim 1/s$ выполняется для близких к току областей, а в далеких энергия, конечно, сходится. Для кольцевого поля с $\alpha = \text{const}$ энергия при больших расстояниях расходится. В [141] предлагается «бессилловое» решение с $B \sim \sin(ky) \exp(-pz)$. Энергия, конечно, сходится при $z \rightarrow \infty$, но

поле не ограничено в плоскости xy . Если эту плоскость свернуть в сферу и соответствующим образом модифицировать решение, то из $\alpha = \text{const}$ опять следует расходимость энергии при больших r .

Как определяется α в реальных конфигурациях. Рассмотрим бессилевое поле при $z > 0$. Будем считать, что на поверхности фотосферы $z = 0$ измерены все три составляющие поля. Тогда α определяется из самой z -компоненты уравнения (1.91), записанного для $z = 0$:

$$\partial_x B_y(z=0) - \partial_y B_x(z=0) = \alpha B_z(z=0). \quad (5.21)$$

Разумеется, с помощью (5.21) α вычисляется при $z = 0$, т. е. $\alpha(x, y, 0)$. Но поскольку α постоянно вдоль силовой линии (см. (1.92)), в принципе оно однозначно определяется своим значением при $z = 0$.

Невозможность существования бессилевых полей в виде тонких трубок. Обратимся сначала к осесимметричным трубкам ($\partial_\phi = 0$, $\partial_z = 0$). Вне трубки полагаем $\text{rot } \mathbf{B} = 0$. Если на границе трубки $B_\phi = 0$, то $B_z \neq 0$ и вне трубки $B_z = \text{const}$, т. е. полное поле не убывает на бесконечности. Если же на границе $B_z = 0$, то $B_\phi \neq 0$ и вне трубки $B_\phi \sim 1/s$ с логарифмической расходимостью энергии. А если свернуть трубку в кольцо? В этом случае существование решения, бессилевого внутри кольца и потенциального вне, противоречило бы теореме вириала, поскольку такое поле является бессилевым во всем пространстве. Иначе говоря, потенциальное поле кольцевого тока (конечно, сходящееся на бесконечности) не сшивается (без скачков) с бессилевым полем внутри кольца. И наоборот, если сшивать бессилевое поле внутри кольца с потенциальным вне, то последнее непременно будет расходиться при $r \rightarrow \infty$.

Построение бессилевой конфигурации общего вида. Пусть при $z = 0$ поле \mathbf{B} задано. Разделим пространство $z > 0$ полуплоскостями $z = n\Delta z$, $n = 0, 1, \dots, N$, где N выбирается настолько большим, чтобы последняя плоскость $z = N\Delta z$ находилась в области исчезающе малой напряженности \mathbf{B} . Заменим производные по z в (1.91) конечными разностями $\partial_z f = [f(n\Delta z) - f((n-1)\Delta z)]/\Delta z$. Полагая N очень большим числом, мы тем самым обеспечим почти точное совпадение производных с конечными разностями. На уровне $z = 0$ поле задано, и согласно (5.21) известно $\alpha(z = 0)$. Тогда с помощью конечно-разностного представления (1.91) и уравнения $\text{div } \mathbf{B} = 0$ нетрудно получить $\mathbf{B}(z = \Delta z)$ и $\alpha(z = \Delta z)$, т. е. эти величины на первом уровне. И вообще, если они известны на уровне $z = n\Delta z$, то они однозначно определяются при $z = (n+1)\Delta z$ [124]. Конечно, полученные выражения неудобны для непосредственного численного счета, и в настоящее время используются более современные численные схемы (см., например, [403]). Для нас, однако, важна лишь принципиальная сторона: однозначная определяемость бессилевого поля (и величины α) при заданном \mathbf{B} на границе $z = 0$.

Условия существования решения. Укажем только два критерия. Первый получается из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ или $\partial_j B_{ij} = 0$, $B_{ij} = B_i B_j - 1/2 B^2 \delta_{ij}$, эквивалентного (1.91). Для поля конечной энергии при $z > 0$ получаем условие $\int B_{i3} dx dy = 0$ при $z = 0$ (так же как из $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ следует $\int B_3 dx dy = 0$) или в компонентах:

$$\int B_x B_z dx dy = 0, \quad \int B_y B_z dx dy = 0, \quad (5.22)$$

$$\int (B_z^2 - B_x^2 - B_y^2) dx dy = 0$$

(см. [125]), интегрирование ведется по всей плоскости xy . Имеются также другие интегралы, возникающие из уравнений $\operatorname{div} [\mathbf{x}, \hat{\mathbf{V}}] = 0$, $\operatorname{div} [\mathbf{x}, [\mathbf{x}, \mathbf{V}]] = 0$ и т. д. [125], а также обобщение их на граничную поверхность — сферу [174], но мы не будем на них останавливаться. Второй критерий следует из (5.21): на кривой $B_z = 0$ (при $z = 0$) вертикальный ток тоже должен обращаться в нуль.

5.7. Бессилловые поля: потеря равновесия

В плазме низкого давления равновесное поле должно быть бессилловым. Обратимся к топологическому неравновесию (топологически достижимое равновесие имеет вид бессиллового поля, но содержит скачки). Оно возникает по трем причинам, данным в разд. 5.3. В настоящем разделе рассмотрим одну из них: потеря равновесия из-за изменения граничных условий.

Кинематические и динамические граничные условия. В разд. 5.6 говорилось, что задание всех трех компонент \mathbf{V} на $z = 0$ однозначно определяет решение при $z > 0$. Физический смысл такой постановки, однако, не всегда ясен. Будем поэтому конкретно предполагать, что изменение граничных условий происходит из-за движений в фотосфере (движение оснований магнитных арок, или движение пятен). Если движение задано при $z \leq 0$, то будем говорить о кинематических граничных условиях. В другом предельном случае, когда электромагнитные силы эффективно влияют на граничные условия, будем говорить о них как о динамических.

Итак, силовые линии заморожены в основание — фотосферу. Движения последней приводят к изменениям граничных условий: меняется $\mathbf{V}(x, y, z = 0)$. Обычно движения медленные (скорости в фотосфере на четыре-пять порядков меньше c_A в короне), поэтому можно ожидать, что изменения адиабатические: поле при $z > 0$ бессилловое и медленно меняется. Ввиду того что $\operatorname{div} \mathbf{V} \equiv 0$ и $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0$, величины

$$B_z(x, y, 0), \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{V} = \partial_x B_y(x, y, 0) - \partial_y B_x(x, y, 0) \quad (5.23)$$

непрерывно переходят через границу $z = 0$.

Частный случай — двумерная конфигурация. Пусть начальное поле потенциальное в виде арки: $B_z(y, z=0) > 0$ при $y < 0$ и $B_z(y, z=0) < 0$ при $y > 0$ (рис. 5.10). Рассмотрим движение на поверхности $z=0$, $u_{\parallel} = \{u_x, 0, 0\}$. Содержательный результат получается при нечетной скорости $u_x(y) = -u_x(-y)$: движение оснований арок в разных направлениях вдоль оси x . В этом случае происходит генерация поля B_x одного знака, которое (с альвеновской скоростью) проникает в корону (см. рис. 5.10, а), см. [305, 404]. Равновесное, т. е. бессильное, поле подчиняется уравнению (1.88), $p=0$. Граничным условием для него является заданная $A(y, z=0)$ (что эквивалентно заданию $B_z = -\partial_y A$), причем, поскольку $B_x(y, z=0)$ тоже известно, то известна

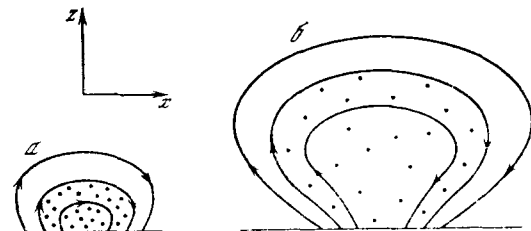


Рис. 5.10. Расширение магнитной арки

а — начальное поле при отсутствии равновесия;
б — расширенная конфигурация. Точками обозначена B_x -составляющая поля

и функция $f(A)$. Величина $B_y(y, z=0)$ не является заданной и определяется уже из самого решения. Поэтому поле при $z > 0$ в данном случае не однозначно (ср. с разд. 5.6). Формально это следует из нелинейности эллиптического уравнения (1.88) (см. [107]). Можно, в частности, указать на два решения при одних и тех же $B_x(z=0)$, $B_z(z=0)$, но разных $B_y(z=0)$ (см. [305, 195], а также обзор [141]). Вопрос о переходе одного решения в другое, связанное с неустойчивостью первого, обсудим ниже, в разд. 6.3. Пока нас интересует потеря равновесия, возникающая не из-за неустойчивости, тем более что арка простой топологии, как на рис. 5.10, а, устойчива [141].

Для всех найденных решений характерно одно важное свойство: они существуют только при ограниченных значениях B_x . При $B_x > B_x^c$, где критическое значение B_x^c разное для различных моделей, бессильных решений нет. Все дело в нарушении третьего условия существования решения (5.22): при больших значениях B_x^c подынтегральное выражение отрицательно и интеграл не равен нулю. Что же произойдет, если движение оснований арок продолжается и B_x станет больше B_x^c ? Конечно, потеря равновесия. Для лучшего понимания процесса предположим, что величина B_x настолько велика, что поперечным полем можно пренебречь. Или, более конкретно, пусть в начальный момент $\mathbf{V}_{\perp} = 0$, а $B_x \neq 0$. Тогда для плазмы низкого давления $\beta \ll 1$ равновесия нет, пучок прямых силовых линий, параллельных оси x , расходится в поперечном направлении (так что расстояние между точками на рис. 5.10 растет) до тех пор, пока внешнее давление не ос-

тановит процесс и β не станет равным единице. В реальном случае ($\mathbf{V}_\perp \neq 0$ и $B_x > B_x^c$) тоже происходит расхождение, или «раздувание», конфигурации (см. рис. 5.10, б). Поперечное поле \mathbf{V}_\perp не способно удерживать поле B_x для плазмы достаточно большого давления $B_x^c/8\pi$. Оно и не оказывает сопротивления: если характерный размер поля $L(t)$, то $B_\perp L = \text{const}$, поэтому энергия на единицу длины $(1/8\pi) \int B_\perp^2 dydz$ не растет при увеличении $L(t)$. Это как раз и означает, что поле \mathbf{V}_\perp не вызывает сил, препятствующих расширению конфигурации [175].

При расширении уменьшается B_x -составляющая ($B_x \sim L^{-2}(t)$) и новое решение в виде бессилового поля, размеры которого $L \gg \gg L(0)$ (как на рис. 5.10, б), отсутствует. Дело в том, что при уменьшении B_x уменьшается и α (см. (5.21), где $B_z(z=0) = \text{const}$). При выполнении $\alpha L(0) \ll 1$ поле стало бы потенциальным, т. е. таким, какое изображено на рис. 5.10, а, и вертикальный размер которого был бы $L(0)$.

Расширение конфигурации не может быть остановлено внешним давлением. В самом деле, внутри конфигурации давление только уменьшилось и равновесие внутри может осуществиться только в виде бессилового поля, но, как сказано, такого решения нет. Впрочем, это видно и непосредственно из основного уравнения равновесия (1.88), из которого следует, что ток ΔA постоянен вдоль силовой линии. Но, как видно из рис. 5.10, б, на фотосферном уровне $z \geq 0$ ток $\Delta A \sim B_x/L(0)$, в то время как сверху $\Delta A \sim \sim B_x/L$, т. е. $\Delta A(z=0) \gg \Delta A(z=L)$.

Единственный «выход» для конфигурации рис. 5.10, б — это пересоединиться в основании, в результате чего произойдет отделение петли и возникнет корональный транзиент. Отметим еще раз, что в процессе расширения напряженность поля B_x падает, в то время как согласно (5.23) $B_x(x, y, 0)$ должно определяться граничными условиями. Поэтому кинематические граничные условия приводят к скачку B_x -составляющей или излому силовой линии при $z=0$. Выпрямление ее при динамических граничных условиях приводит к тому, что $B_x(z=+0)$ приравнивается к нижнему большему значению $B_x(z=-0)$. Это эквивалентно потоку энергии B_x -поля вверх через границу $z=0$, что только ускоряет описанный процесс.

Срыв равновесия слабым продольным полем. Если начальное потенциальное поле ($\partial_x = 0$) содержит X-точку, то даже слабое смещение оснований силовых линий в x -направлении может привести к потере равновесия. На рис. 5.11 видно, как непрерывное смещение оснований приводит к генерации B_x -функции с разрывом на сепаратрисе [409, 176]. Действительно, сдвиг оснований арки AA' генерирует поле $B_x < 0$, основания арки BB' сдвигаются одинаково и поле B_x не генерируется, т. е. $B_x = 0$. Следовательно, на участке сепаратрисы между A и B поле B_x меняется скачком. А сдвиг арки CC' приводит к генерации поля $B_x > 0$, тоже меняющегося скачком на участке сепаратрисы между B' и C .

Несимметричные поля. Рассмотренный выше механизм формирования транзиентов обладает специальной симметрией ($\partial/\partial x = 0$). В более общем, несимметричном случае все происходит аналогично. Пусть начальное потенциальное поле образовано двумя пятнами. При вращении их в разных направлениях на уровне фотосферы происходит закрутка поля, т. е. генерация B_φ -составляющей (рис. 5.12). Поле становится бессильным, т. е. все еще равновесным. Однако, когда при $z = 0$ величина $B_\varphi^2 = B_x^2 + B_y^2$ становится большой, нарушается третье условие существования бессильного решения (5.22) и вся магнитная трубка начинает раздуваться. Обозначим ее поперечник буквой L . Расширение происходит, грубо говоря, в короне. Внизу на фотосферном уровне силовые линии по-прежнему закреплены в пятнах (размера l). Когда L станет много больше l , напряженность поля будет падать как $B \sim 1/L^2$, поэтому и энергия $\sim (B^2/8\pi) L^3 \sim L^{-1}$, т. е. тоже уменьшается с ростом L . Следовательно, поле не препятствует своему собственному расширению. Таким образом и образуется транзиент [223].

Приведем еще пример потери равновесия. Пусть начальная конфигурация соответствует потенциальному полю над двумя группами пятен (рис. 5.13). Расстояние между пятнами AB много меньше расстояния CD , поэтому практически все силовые линии пятна A замыкаются на B и линии пятна C замыкаются на D . Предположим сначала, что при $z > 0$ плазма отсутствует, $\beta = 0$. Будем менять граничные условия: раздвигать пятна A и B . Когда расстояние AB станет равным CD , топология потенциального поля при $z > 0$ изменится: примерно половина магнитного потока, выходящего из пятна A , будет по-прежнему замыкаться на B , а другая половина — на D . И соответственно половина потока от C будет по-прежнему замыкаться на D , а половина — на B . При дальнейшем раздвижении арки AB топология опять изменится: нижняя арка на рис. 5.13 станет верхней, и наоборот.

Конечно, эти процессы связаны с пересоединением силовых линий, расположенных под углом одна к другой, как на рис. 5.5, б, в. В вакууме, т. е. при $\beta = 0$, изменение топологии и пересоединение происходят без труда, поскольку поле $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ однозначно определяется полем $B_z (z = 0)$, т. е. положением пятен. В высокопроводящей плазме низкого давления, $\beta \ll 1$, ситуация принципиально меняется. Раздвижение пятен вызывает подъем арки AB . Она сталкивается с верхней аркой CD , но с очень медленной скоростью (на несколько порядков меньшей альвеновской). Поскольку верхняя арка не «закреплена» сверху, нижнюю нельзя представить в виде «поршня», сдвигающего поле (см. разд. 5.1). В принципе возможна передача импульса верхней арке с медленным адиабатическим подъемом всей конфигурации и без уменьшения масштаба поля. Так будет при условии, что существует равновесие не только в виде начальной конфигурации (см. рис. 5.13), но и когда $AB = CD$ или, скажем, $AB \gg CD$. Ввиду того что $\beta \ll 1$ и вследствие отсутствия плазменного слоя

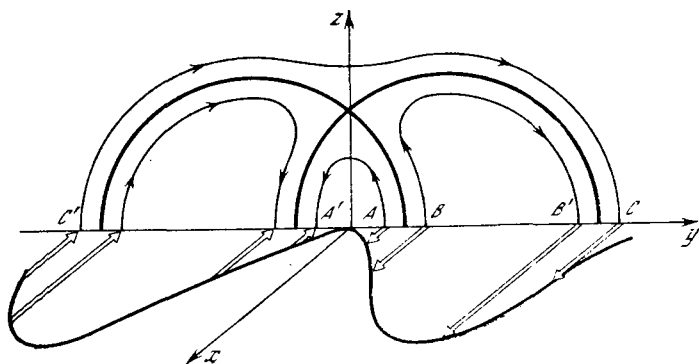


Рис. 5.11. Сдвиг оснований арки непрерывным движением, в результате которого возникают разрыв поля и токовый слой на сепаратрисе

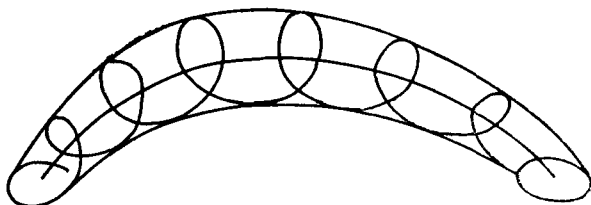


Рис. 5.12. Генерация B_{φ} -составляющей из-за вращения пятен

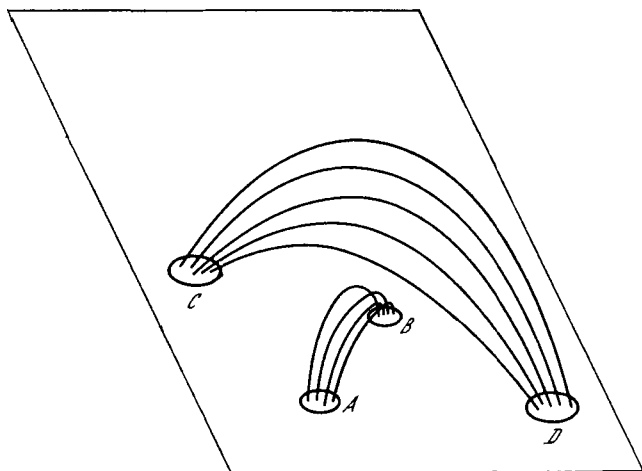


Рис. 5.13. Взаимодействие полей группы пятен

($\mathbf{V} \neq 0$ во всех точках), равновесие может осуществляться только в виде бессилового поля.

Однако эта конфигурация не может быть бессиловой! Дело в том, что из (1.92) следует, что α постоянно вдоль силовой линии. Но ввиду псевдоскалярного характера α (см. (1.91)) $\alpha \neq 0$ соответствует правой или левой винтовой закрутке силовой линии (в зависимости от знака α). Если сами пятна не вращаются (что и предполагаем), то закрутки нет и псевдоскаляру α неоткуда появиться. Следовательно, конфигурация рис. 5.13 со сдвинутыми пятнами A, B не может находиться в равновесии (без скачков поля). В идеально проводящей среде устанавливается скачок в виде вращательного разрыва — в месте контакта полей двух арок. А в реальной высокопроводящей среде в этом месте формируется ТС с медленным пересоединением силовых линий.

5.8. Топологическая инвариантность

Для упрощения геометрии конфигураций рис. 5.12, 5.13 Паркер предложил рассматривать первоначально однородное вертикальное поле между плоскостями $z = 0$ и $z = L$. Оно моделирует начальное потенциальное поле. Движение в основаниях силовых линий при $z = 0, L$ будет передаваться внутрь в зону $0 < z < L$ в виде возмущений с альвеновской скоростью и перестраивать конфигурацию. Простое вращение приводит к закрутке поля, как в правой части рис. 5.14, что соответствует конфигурации рис. 5.12, только в «выпрямленной» геометрии.

Если движение в основаниях обладает масштабом l , $l \ll L$, то поле в зоне тоже обладает двумя масштабами — l и L . В первом приближении конфигурация получается двумерной: поле зависит только от x, y , а зависимость от z на масштабе L можно пренебречь. Однако так получается не всегда. А именно квазидвумерность получается в двух случаях: 1) если возмущения малы: $(B_x^2 + B_y^2)^{1/2} \ll B_z$, т. е. движения в основаниях продолжаются недолго или медленно; 2) при сравнительно простой закрутке поля, так что в зоне не образуются топологические узлы и т. п.

В общем случае движения на фотосфере $z = 0, L$ генерируют сложные топологические образования в зоне. Например, они могут «заплести косу» или «выткать ткань». Случайные блуждания оснований силовых линий тоже сильно запутывают их (см. левую часть рис. 5.14). Топология конфигурации меняется вдоль силовых линий. Это явление названо Паркером топологической инвариантностью [331]. Несмотря на отсутствие строгого математического определения этого понятия, именно оно явилось исторически первым примером топологического неравновесия (1972 г.).

Случай малых возмущений. При небольших смещениях оснований возмущения основного поля B_z малы: $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(0)} + \mathbf{V}'$, $V' \ll V^{(0)}$, $p' \ll p_0$, p_0 — начальное распределение давления, p' — возмущение. Легко понять, что это частный случай вытянутой

конфигурации (см. разд. 5.5). Причем, несмотря на малость возмущения, топология вдоль силовой линии может меняться (как в левой части рис. 5.14, если считать, что расстояние L очень велико по сравнению с l). Основное поле $\mathbf{V}^{(0)} = \{0, 0, B_z^{(0)}\}$, $B_z^{(0)} = \text{const}$, оно находится в равновесии при $p_0 = \text{const}$. В первом приближении условие равновесия (1.84) записывается в виде $[\text{rot } \mathbf{V}', \mathbf{V}^{(0)}] = 4\pi \nabla p'$. Отсюда следует, что $\partial_z p' = 0$, и $p' = p'(x, y)$. Тем самым в силу (1.85) поле расположено на цилиндрических поверхностях: $p' = \text{const}$. Равновесие топологически инвариантно. Если поле бессилное, $p' = 0$, то $\text{rot } \mathbf{V}' = \alpha \mathbf{V}^{(0)}$, откуда $\partial_z \alpha = 0$. Следовательно, поле опять расположено на поверхностях $\alpha(x, y) = \text{const}$.

Сильно переплетенные поля. Общий случай неинвариантной топологии не изучен. Можно указать на несколько физически ясных примеров для $\beta \ll 1$, т. е. бессильных полей.

1. Зацепление одной силовой линии за другую, как в левой части рис. 5.14, эквивалентно взаимодействию магнитных трубок (см. рис. 5.13), и, как в разд. 5.7, равновесие без скачков в месте контакта трубок невозможно.

2. В более сложных переплетениях трубка скручивается левым и правым «винтом» (опять-таки как в левой части рис. 5.14). Аналогично при «плетении косы». Равновесие в виде бессильного поля — без разрывов — здесь невозможно, так как $\alpha = \text{const}$ вдоль силовой линии (1.92), в то время как изменение знака винта означает изменение знака α вдоль силовой линии (подробнее см. [335, 339]).

3. Если сдвинуть верхнюю часть трубки при $z = L$ вправо, а нижнюю при $z = 0$ влево, то она перекашивается. Трубка раздвигает силовые линии фонового поля, и в конечном состоянии они обходят ее. Ясно, что силовые линии не закручены: в трубке они вытянуты вдоль нее, а вне — обходят трубку, поэтому псевдоскаляр α опять не может появиться. Равновесное поле всюду потенциально и при однородных граничных условиях на B_z (не меняющихся в процессе сноса трубки) должно быть однородным. Поэтому на границе трубки вынужден образоваться разрыв поля или при конечной проводимости ТС. Ситуация не изменится, если внутри трубка будет закрученной, $B_\phi \neq 0$, но на границе ее $B_\phi = 0$, поскольку неравновесие связано как раз с невозможностью сшивки двух топологически несвязанных полей в виде бессильных решений вне и внутри трубки [342]. Таким образом должны образовываться разрывы и ТС при случайных блужданиях двух концов трубки [331].

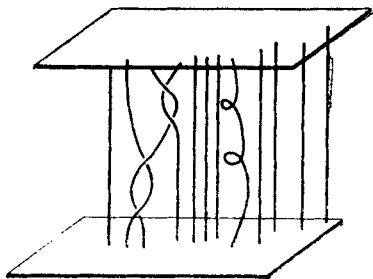


Рис. 5.14. Пример топологически неинвариантного поля

В заключение отметим следующее. В [408] рассматривается эволюция поля, выраженная через смещения плазмы (см. (1.115)). Утверждается, что любому непрерывному смещению при $z = 0$ отвечает равновесие в виде бессилового поля. При этом все выражения линеаризуются. Это обстоятельство делает неприменимыми результаты [408] для рассмотренных выше примеров. Действительно, при сложном движении, дающем переплетенные поля, смещения не малы по сравнению с горизонтальными масштабами движений l по меньшей мере в окрестности фотосферы, и линеаризация здесь невозможна. Кроме того, для простейших смещений типа описанных выше в п. 3, топологически достижимое равновесие будет представлено в виде однородного поля почти всюду, кроме (опять-таки) окрестности фотосферы, где поле резко изгибается, т. е. B_x, B_y не малы по сравнению с B_z , и линеаризация (1.115) неоправданна.

5.9. Динамика магнитных облаков и плазмойдов в солнечном ветре

Большие структуры солнечного ветра называют магнитными неоднородностями или облаками, структуры меньшего размера — плазмойдами (в 60-е годы их называли корпускулярными потоками [122]). Они возникают на фоне однородного поля. Рассмотрим, могут ли они находиться в равновесии.

Общие свойства плазмойдов во внешнем магнитном поле. Конфигурация представляет собой поле, замкнутое внутри плазмойда, отделенного сепаратрисной поверхностью от внешнего открытого поля (область I). Будем сначала считать, что на больших расстояниях от плазмойда, центр которого расположен в точке $\mathbf{x} = 0$, поле параллельно оси y и при $|y| \rightarrow \infty$ асимптотически $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_0 = \{0, B_0, 0\}$, $B_0 = \text{const}$. В этих условиях плоскости $y = \pm y_0$ ($y_0 \gg L$, L — размер плазмойда) пересекаются практически однородным магнитным полем. Поэтому на этих плоскостях $p = \text{const}$. Двигаясь вдоль силовой линии, на которой тоже выполняется $p = \text{const}$ (см. (1.85)), можно попасть в любую точку области I. Следовательно, в ней всюду $p = p_0 = \text{const}$. По этой причине равновесие (1.84) может осуществляться только в виде бессилового поля. По этой же причине на плоскостях $y = \pm y_0$ $\alpha = 0$ и в силу (1.92) $\alpha = 0$ всюду в области I. Итак, в области I поле потенциально.

Представим поле \mathbf{B} в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, где \mathbf{B}' — поле, созданное токами плазмойда (ибо только в нем они могут течь). Тогда полная сила, действующая на плазмойд, запишется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \int (-\nabla p + [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]/4\pi) d\mathbf{x} = - \int_S p_0 d\mathbf{S} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int [\text{rot } \mathbf{B}', \mathbf{B}'] d\mathbf{x} + \frac{1}{4\pi} \int [\text{rot } \mathbf{B}', \mathbf{B}_0] d\mathbf{x} = \frac{1}{c} \int [j\mathbf{B}_0] d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где dS — элемент поверхности. Интегрирование ведется по внутренней области, ограниченной сепаратрисной поверхностью. Интеграл, содержащий давление, преобразуется в поверхностный, на поверхности $p = \text{const} = p_0$. И он обращается в нуль: $\int p_0 dS = \int \nabla p_0 dx = 0$. Вообще, первые два интеграла второго равенства (5.24) обращаются в нуль, так как представляют собой сумму внутренних сил.

Аналогично вычисляется момент сил:

$$\mathbf{M} = \int \left[\mathbf{x}, \left(-\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}] \right) \right] d\mathbf{x} = \frac{1}{c} \int \left[\mathbf{x}, [\mathbf{j}\mathbf{B}_0] \right] d\mathbf{x} = [m\mathbf{B}_0], \quad (5.25)$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{x}\mathbf{j}] d\mathbf{x},$$

\mathbf{m} — магнитный момент. Здесь использованы представление $\mathbf{j} = \text{ned}_x$ и условие стационарности (см. [109]). Этими же свойствами можно воспользоваться при вычислении силы, действующей на плазмод во внешнем слабонеоднородном потенциальном поле \mathbf{B}_0 . Тогда, раскладывая (5.24) в окрестности $\mathbf{x} = 0$, где находится плазмод, получаем

$$\mathbf{F} = \nabla (m\mathbf{B}_0). \quad (5.26)$$

Плоская геометрия. Обратимся прежде всего к двумерной конфигурации, как это обычно рассматривается (см. [348]). На рис. 5.15, *a* изображен плазмод во внешнем поле. Находится ли вся конфигурация в равновесии? Ответ отрицательный: на плазмод действует несбалансированная сила \mathbf{F} (5.24). В самом деле, пусть \mathbf{B}_0 — однородное поле. Тогда интеграл по \mathbf{j} по теореме Стокса преобразуется в криволинейный от магнитного поля по сепаратрисе (см. рис. 5.15, *a*, пунктир). Очевидно, он не равен нулю, и сила \mathbf{F} , как легко понять, действует вниз, прижимая плазмод к нижним силовым линиям. В идеально проводящей среде здесь образуется разрыв (рис. 5.15, *b*). Ток разрыва, добавленный в (5.24), обратит это выражение в нуль, и наступит равновесие (подробнее см. [48]). Но без разрыва равновесие невозможно. Конфигурация рис. 5.15, *a*, стало быть, топологически неравновесна. Если поле \mathbf{B}_0 слабонеоднородно, то равновесие — даже с разрывом — не устанавливается. Пусть силовые линии расходятся в положительном направлении оси y , т. е. B_0 уменьшается с ростом y . Тогда на плазмод действует сила (5.26). Поскольку в данном случае $m_y < 0$, получается, что \mathbf{F} направлена в положительном направлении y . Это и есть диамагнитное выталкивание плазмоида в область малой напряженности B_0 [348].

Топологическое неравновесие в рассмотренной конфигурации связано в конечном счете с тем, что полный ток, текущий через плазмод (в x -направлении), не равен нулю. Рассмотрим два случая с нулевым полным током. Пусть в первом примере поле на сепаратрисе рис. 5.15, *a* обращается в нуль (это и означает, что полный ток равен нулю). Тогда в области I, где $\text{rot } \mathbf{B} = 0$ или

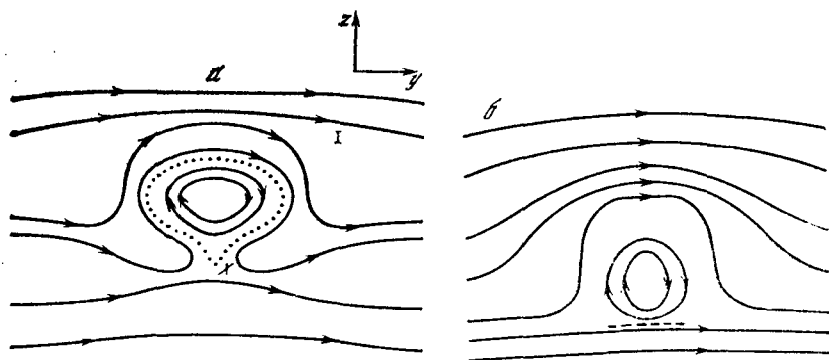


Рис. 5.15. Плазмод во внешнем поле (а) и образование разрыва (штриховая линия) (б)

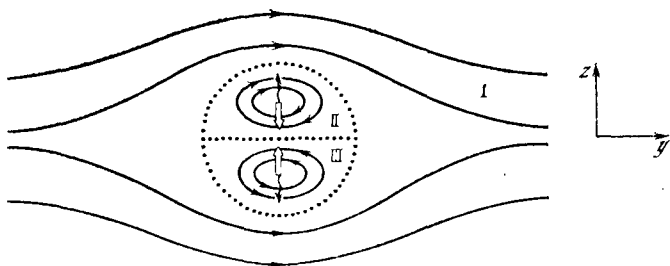


Рис. 5.16. Равновесный плазмод

$\Delta A = 0$ (см. (1.88)), имеем граничные условия на сепаратрисе: $\nabla A = 0$ и $A = \text{const}$ с единственным решением $A = \text{const}$, т. е. $\mathbf{V} = 0$ всюду в области I. Поскольку в действительности $\mathbf{V} \neq 0$ в области I, равновесия нет.

Второй пример — конфигурация рис. 5.16. Токи текут внутри круга радиуса R : в верхнем полукруге (область II) в отрицательном направлении оси x (т. е. «от нас»), в нижнем (область III) в положительном («на нас»). Конфигурация может находиться в равновесии. Это видно из следующего частного случая. Уравнение (1.88) удовлетворяется с $f(A) = -\lambda^2 A$, $J_1(\lambda R) = 0$ и в цилиндрических координатах (s, φ, x):

$$A = \begin{cases} J_1(\lambda s) \sin \varphi, & s < R, \\ \frac{1}{2} \lambda J_1'(\lambda R) \left(s - \frac{R^2}{s} \right) \sin \varphi, & s \geq R. \end{cases}$$

Это решение удовлетворяет необходимым требованиям: A и ∇A (т. е. \mathbf{V}_\perp) непрерывны и при $s \rightarrow \infty$ $A \sim s \sin \varphi$, что соответствует однородному полю. Проанализируем баланс сил. Прежде всего, полная сила (5.24) $\mathbf{F} = 0$, так как $\int \mathbf{j} dx = 0$. Это же должно выполняться для областей II и III в отдельности. Силу, дейст-

вуюющую на область II, получаем аналогично (5.24):

$$F_{II} = \frac{1}{c} \int_{II} j_x \nabla A_0 dy dz + \frac{1}{c} \int_{II} j_x \nabla A_{III} dy dz, \quad (5.27)$$

$$A_0 = zB_0, \quad A_{III} = -\frac{1}{c} \int_{III} j_x(y', z') \ln X dy' dz',$$

$X = x - x'$. Первое слагаемое в (5.27) — взаимодействие x -тока области II с внешним однородным магнитным полем — соответствует правой части (5.24). Сила направлена вниз (как на рис. 5.15, на рис. 5.16 она изображена двойной стрелкой). Второе слагаемое — это взаимодействие x -тока с полем, созданным токами области III, — соответствует отталкиванию двух противоположных токов. Сила обозначена волнистой стрелкой. Эти две силы точно компенсируют друг друга, иначе не было бы равновесия.

Это равновесие, однако, неустойчиво. Действительно, если немного повернуть области II и III в плоскости рис. 5.16 вокруг оси x (проходящей через центр круга), силы, обозначенные двойными стрелками, не изменят ни своей величины, ни направления, в то время как сила отталкивания направлена радиально. В результате появляется момент сил, стремящихся еще более повернуть конфигурацию до тех пор, пока области II и III не поменяются местами (поворот на 180°). Это видно также из выражения для момента (5.25). В начальном состоянии m антипараллельно \mathbf{B} и $\mathbf{M} = 0$. Но при небольшом повороте областей II и III момент сил $\mathbf{M} \neq 0$ и стремится развернуть конфигурацию в том же направлении. Это утверждение, впрочем, нуждается в уточнении. Дело в том, что в идеально проводящей среде на границе $s = R$ возникает разрыв и соответствующие δ -токи могут дать момент, компенсирующий возникший. Однако при неполном повороте плазмоида не выполняется условие на разрыве (5.2) или (5.3). Легко понять, что на «полюсах», плазмоида, где $\mathbf{B}_\perp = 0$, левая часть (5.3) имеет один знак, а на «экваторе» — другой, в то время как правая часть, конечно, постоянна.

После поворота плазмоида (см. рис. 5.16) на 180° равновесие в идеально проводящей среде устанавливается, но при непременном существовании разрыва на границе $s = R$. Дело в том, что две силы, действующие на область II (и соответственно III), теперь уже параллельны (а не антипараллельны, как на рис. 5.16) и прижимают поле областей II и III к противоположно направленным полям в области I, формируя разрыв (как на рис. 5.15, б).

Трехмерные плазмойды. Воспользуемся опять рис. 5.16, считая, что на нем изображен меридиональный разрез осесимметричной (относительно оси y) конфигурации. Силовые линии соответствуют полоидальному полю, а B_x -составляющая (не изображенная на рисунке) — тороидальному полю B_ϕ . Сепаратриса — сфера радиуса R . Равновесное решение такого типа хорошо известно (см., например, [33]). Но оно неустойчиво относительно поворота токовой системы, т. е. плазмоида, вокруг оси x по той же причине,

что и в предыдущем подразделе. После поворота плазмоида на 180° в идеально проводящей среде равновесие устанавливается с разрывом на сфере $r = R$. Дело в том, что в окрестности любой точки сферы поле меняет знак на противоположный при переходе от плазмоида в область I. Существование непрерывного плавного перехода через нуль означало бы, что в области I реализуется потенциальное поле $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ с $\mathbf{V} = 0$ на сфере и $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_0$ на бесконечности, что, конечно, невозможно (ср. с первым примером во втором пункте настоящего раздела).

Динамика плазмоедов. Отметим прежде всего, что начальный магнитный момент \mathbf{m} антипараллелен \mathbf{V}_0 . После поворота плазмоида момент токов внутри плазмоида, конечно, тоже поворачивается на 180° и становится параллелен \mathbf{V}_0 . Но полный момент всех токов, включая токи разрыва на поверхности сферы, конечно, по-прежнему антипараллелен полю \mathbf{V}_0 : иначе потенциальное поле $\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'$ вне плазмоида асимптотически вело бы себя не так, как на рис. 5.16. По этой причине в слабонеоднородном внешнем поле \mathbf{V}_0 (V_0 уменьшается с ростом y) диамагнитная сила (5.26) всегда действует в положительном направлении оси y как для конфигурации рис. 5.16, так и для перевернутого плазмоида.

Таким образом, происходит ускорение плазмоедов в расширяющихся полях корональных дыр, что приводит к дополнительному ускорению солнечного ветра [348]. Динамика магнитных облаков, возникающих в результате вспышечной активности, изучалась в [82].

Кроме этого эффекта, выше было указано еще на два: 1) топологическая неравновесность простейшего плазмоида, в результате чего формируется ТС, и 2) неустойчивость первоначально равновесного плазмоида по отношению к повороту токовой системы, так что в конце концов ТС все-таки образуется. Конечно, рассмотренные примеры не претендуют на всеобщность. Возможно, присутствуют устойчивые равновесные плазмоеды во внешнем поле. Тем не менее простота и естественность рассмотренных выше примеров наводят на мысль о распространенности этих эффектов и о неизбежном формировании ТС. Геоэффективные свойства ТС обсуждались в [353].

В заключение отметим, что поворот плазмоида происходит за короткое время R/c_A . Затем происходит пересоединение силовых линий, приводящее к «раздеванию» плазмоида (как и предполагалось в [348]). Пересоединение в данном случае медленное — со скоростью течения Паркера — Свита (см. разд. 6.4), причем толщина ТС может быть рассчитана на основании аномальной проводимости: плазма солнечного ветра бесстолкновительна. Если принять частоту столкновений как в (2.121), то оценка дает, что только магнитные неоднородности, размер которых превышает 10^{10} см, могут пройти все расстояние от Солнца до Земли, меньшие распадаются [48].

5.10. Равновесие скрученных магнитных трубок: роль продольного поля

Расширение скрученного поля. Вернемся к конфигурации рис. 5.12, образованной закруткой поля двумя вращающимися пятнами (в прямой геометрии — правая часть рис. 5.14). Происходит генерация B_φ -составляющей. Важным моментом является обращение B_φ в нуль на границе или, что эквивалентно, обращение в нуль z -компоненты полного тока (см. рис. 5.14) и продольного (вдоль начального поля) полного тока (см. рис. 5.12). Конечно, условие $B_\varphi = 0$ не обязательно должно выполняться на цилиндрической поверхности. Физически приемлемыми являются конфигурации с $B_\varphi \rightarrow 0$ на бесконечности, но это стремление должно быть достаточно быстрым.

Это связано главным образом с ограниченностью самого движения (или вращения) на фотосферном уровне. Предположим тем не менее, что $B_\varphi \neq 0$ на границе арки (см. рис. 5.12). Тогда вне арки оно должно убывать как $1/s$ (s — расстояние до тока). Это означает, что на фотосфере поле $B_\varphi \sim 1/s$, и так до $s \sim L$, L — высота арки (и расстояние между пятнами), дальше поле должно убывать быстрее. Но такого типа равновесие, т. е. бессилое поле, невозможно. Это видно, во-первых, из того, что третье условие (5.22) не выполняется: $B_x^2 + B_y^2 = B_\varphi^2$ и интегрирование дает $\int B_z^2 dx dy < \int (B_x^2 + B_y^2) dx dy \sim \ln L/l$, l — размер пятна. Во-вторых, энергия бессилового поля в виде тонких трубок расходится на бесконечности (см. разд. 5.6).

Хорошо известно, что в лабораторных условиях наложение B_φ -составляющей поля приводит к сжатию конфигурации — пинч-эффекту. Но при этом существенно, что $B_\varphi \neq 0$ на границе плазменного шнура. Как сказано, в космических условиях более типичным является равенство $B_\varphi = 0$ на границе или быстрое (быстрее, чем $1/s$), скажем экспоненциальное, убывание B_φ на бесконечности. Тогда наложение B_φ -составляющей приводит к расширению конфигурации. Действительно, согласно (1.89) в условиях равновесия

$$\int_0^l P ds^2 = P_\infty l^2, \quad (5.28)$$

$P = B_z^2/8\pi$ в рассматриваемом случае бессилового поля. Будем считать, что начальное поле однородное, так что $B_z^2/8\pi = \text{const} = P_\infty$, и (5.28) выполняется автоматически. После закрутки поля, т. е. генерации B_φ -составляющей, внутренняя часть области, где $s < s_1 < l$, сожмется, давление P здесь возрастет, а внешняя, $s_1 < s < l$, расширится с уменьшением давления так, чтобы выполнялось (5.28) (см. также [41]). Учитывая вмороженность, т. е. сохранение потока $B_z s_1^2 = \text{const}$, легко получим, что радиус, или поперечный размер области l , растет с ростом B_φ -составляю-

щей. Как говорилось в разд. 5.7, при достаточно большой напряженности B_ϕ конфигурация¹ уже не сдерживается внешним давлением и начинает неограниченно раздуваться. Так происходит, когда давление во внешней области $s_1 < s < l$ должно было бы стать отрицательным: это другое объяснение потери равновесия, данное в разд. 5.7.

Образование магнитных островов. Вернемся к рис. 5.14, представляющему модель закрытой конфигурации. Энергия движений в основании открытой конфигурации передается с альвеновской скоростью в солнечный ветер, а в закрытой — в энергию магнитных полей внутри зоны $0 < z < L$. Предположим теперь, что движение происходит во множестве ограниченных ячеек на основа-

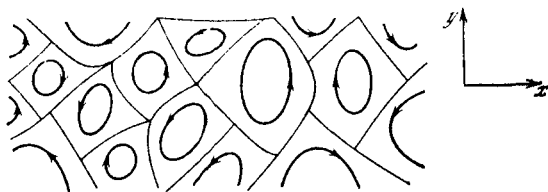


Рис. 5.17. Компактные ячейки (магнитные острова) в солнечной короне

нии $z = 0$. Тогда внутри зоны будут создаваться скрученные трубки, как в правой части рис. 5.14. Движения на фотосферном уровне медленные, поэтому каждая трубка должна находиться в равновесии. Как сказано в предыдущем пункте с ростом B_ϕ -составляющей каждая трубка будет расширяться. Трубки будут поднимать друг друга до тех пор, пока не станут «плотно упакованными». Поперечная составляющая (B_x -, B_y -компоненты) принимает характерный вид множества ячеек или магнитных островов (рис. 5.17) [338]. Здесь изображено поле на некоторой плоскости $z = \text{const}$. Причем при достаточно большом L (по сравнению с размером ячейки l) все поле практически не зависит от z , т. е. оно топологически инвариантно (ср. разд. 5.8).

Обсудим вопрос о возможности равновесия в виде плотно упакованных скрученных трубок. Прежде всего они должны удовлетворять уравнению (1.88). Здесь удобнее иначе расположить систему координат: $A \equiv A_z$, $P = p + B_z^2/8\pi$, $B_x = \partial_y A$, $B_y = -\partial_x A$. Проблема равновесия скрученных трубок не сводится к рассмотренным в предыдущих разделах случаям, несмотря на то что и здесь плазменное движение мало: $\beta \ll 1$. Дело в том, что роль давления в данном случае играет продольное поле $B_z^2/8\pi$. Его напряженность не мала, так что естественное возникновение ТС в результате перехода X-точки в нулевую линию (см. разд. 5.4) здесь исключено. Скрученная трубка отличается также от тонких трубок (см. разд. 5.5). Последние осесимметричны, а B_s -, B_z -составляющие (т. е. продольное поле) обращаются в нуль на поверхности вращения. В рассматриваемом случае возможно обращение в нуль B_x -, B_y -составляющих на цилиндрических поверхностях.

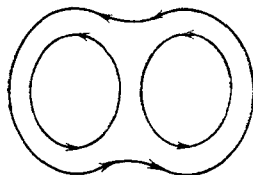
Итак, возможно ли равновесие поля (см. рис. 5.17)? В принципе да. Это видно из следующего примера. Пусть в уравнении (1.88) $f(A) = -\lambda^2 A$, тогда можно указать решение (частное и общее) в виде

$$A = a \cos xk_x \cos yk_y, \quad k_x^2 + k_y^2 = \lambda^2, \quad (5.29)$$

$$A = \int_{k_x^2 + k_y^2 = \lambda^2} a(k_x, k_y) \exp i(xk_x + yk_y) dk_x dk_y \quad (5.30)$$

(см. [338]). Например, частное решение (5.29) представляет собой набор ячеек, расположенных в шахматном порядке: у половины клеток циркуляция поля против часовой стрелки, а у другой —

Рис. 5.18. Розеточная структура в виде двух сливающихся магнитных островов



по часовой стрелке. Можно рассмотреть и другие равновесные решения. Важной характеристикой для них является отсутствие нулевых линий. Поле обращается в нуль только в X - и O -точках.

Из рис. 5.17, видно, что если рядом расположены ячейки разной циркуляции, то нулевая линия между ними не возникает. Но если закрутка двух соседних ячеек происходит в одном направлении, то циркуляция одинакова и линия соприкосновения двух ячеек является нулевой линией. Во всяком случае, если имеется точка соприкосновения трех (и вообще нечетного числа) ячеек, то циркуляции двух (как минимум) из них оказываются одинаковыми и нулевая линия неизбежно появляется.

Если хоть одна из нулевых линий — прямая, то согласно разд. 4.4 равновесие вырождается в одномерное. Иными словами, в этом случае конфигурация рис. 5.17 оказывается топологически неравновесной.

Таким образом, есть веское основание считать, что топологически достижимым равновесием для конфигурации рис. 5.17 является поле со скачками на нулевых линиях и в реальной неидеально проводящей плазме здесь появится ТС. В результате пересоединения две ячейки с одинаковой циркуляцией поля (или два магнитных острова) начинают сливаться. Возникает характерная «розеточная» структура (рис. 5.18). Нулевая линия исчезла (осталась только X -точка), и вопрос о существовании равновесия в таком виде (в общем случае) открытый. В ряде важных частных случаев (см. разд. 5.11) эта конфигурация оказывается топологически неравновесной, поэтому поле не останавливается на конфигурации, представленной на рис. 5.18, и слияние островов продолжается. Разумно предположить, что все соседние острова с одинаковой циркуляцией поля в конце концов сольются [338]. В резуль-

тате из множества малых ячеек возникает значительно меньшее количество крупных, так чтобы соседи всегда обладали одинаковой циркуляцией. Процесс иллюстрирует передачу энергии от малых ячеек крупным, т. е. обратный поток энергии, характерный для двумерной турбулентности (см. разд. 4.1), и представляет си-нергетические свойства магнитного поля.

5.11. Слияние магнитных островов

Этот процесс является наиболее перспективным в смысле скорости пересоединения. Об этом подробно будем говорить в разд. 6.4. Вместе с тем далеко не все можно считать твердо установленным.

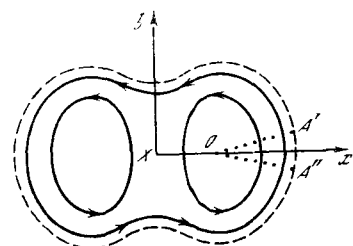


Рис. 5.19. Ограниченная розеточная структура (штриховая кривая соответствует нулевой линии)

Дело в том, что, к сожалению, простая интерпретация на качественном уровне здесь, вероятно, невозможна. Многочисленные попытки воспользоваться сравнительно простыми доказательствами топологического неравновесия розеточной структуры окончились неудачей. Во всяком случае, в настоящее время нет доказательства для общего случая. Приходится признать, что это вопрос тонкий, здесь имеется множество «подводных камней». Ограничимся частным случаем.

Нулевая линия. Будем рассматривать частный случай ограниченной конфигурации, когда розеточная структура ограничивается нулевой линией (рис. 5.19). В отличие от рис. 5.18, где вне изображенного поля может быть «все что угодно», влияющее на равновесие, здесь всякое внешнее поле не влияет на изображенную конфигурацию, поскольку на нулевой линии $[\text{rot } \mathbf{V}, \mathbf{V}] = 0$. Поэтому без ограничения общности вне конфигурации можно положить $\mathbf{V}_\perp = 0$.

Формально нужно искать решение эллиптического уравнения (1.88) с граничными условиями $A = \text{const}$ (задача Дирихле) и $\partial_n A = 0$ (задача Неймана). Оба условия должны выполняться на нулевой линии! Конечно, это обстоятельство должно приводить к вырождению решения. В отличие от разд. 5.4, где как раз такое вырождение мы наблюдали, форма нулевой линии здесь не задана, она произвольна, что приводит к усложнению проблемы. Но все же вырождение можно ожидать.

Воспользуемся некоторыми свойствами равновесия. В полярной системе (s, φ) с центром в точке O (см. рис. 5.19) условие равновесия (1.88) записывается в виде (5.9), а эквивалент уравнения (5.14) в виде

$$\begin{aligned} \partial_s \partial_s s B_s + s^{-1} \partial_s s B_s + s^{-2} \partial_\varphi \partial_\varphi s B_s = \\ = s B_s B_\varphi^{-1} (\partial_s \partial_s B_\varphi + \partial_s s^{-1} B_\varphi + s^{-2} \partial_\varphi \partial_\varphi B_\varphi + 2s^{-2} \partial_\varphi B_s). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Выпишем разложение всех функций в окрестности $s = 0$ ($B_s = s^{-1}\partial_\varphi A$, $B_\varphi = -\partial_\varphi A$):

$$A = A_0 + A_2(\varphi)s^2 + A_3(\varphi)s^3 + \dots, \quad (5.32)$$

$$B_s = d_\varphi A_2 s + d_\varphi A_3 s^2 + \dots, \quad (5.33)$$

$$B_\varphi = -2A_2 s - 3A_3 s^2 - \dots. \quad (5.34)$$

Нам потребуется еще одно представление A :

$$A = \sum_{m \neq \pm 1} a_m(s) \exp im\varphi, \quad (5.35)$$

где m — целое. Необходимо разъяснить, почему в (5.35) отсутствует слагаемое $a_1(s) \exp i\varphi$. Дело в том, что согласно (5.32) разложение $a_1(s)$ при $s = 0$ начинается со степени не ниже второй, $a_1(s) \sim \tilde{a}_1 s^n$, $n \geq 2$. Подставляя выражение $\tilde{a}_1 s^n \exp i\varphi$ в левую часть (5.9), получаем $\Delta \tilde{a}_1 s^n \exp i\varphi \sim (n^2 - 1) \tilde{a}_1 s^{n-2} \exp i\varphi$, справа же таких слагаемых нет. Поэтому $\tilde{a}_1 = 0$ и, следовательно, $a_1 = 0$. По аналогичной причине невозможно сконструировать a_1 следующим образом: $a_1 = 0$ при $s < s_0$ и $a_1 \neq 0$ при $s > s_0$, если отсутствует скачок поля.

Рассмотрим сначала случай слабого отклонения от осевой симметрии в секторе $A'OA''$ (см. рис. 5.19): $\partial_\varphi \ll s\partial_s$ (ср. с уравнением (5.10) вытянутых — в данном случае вдоль e_φ — конфигураций). Этот случай действительно реализуется, если внешний магнитный поток (охватывающий оба острова) мал по сравнению с магнитным потоком самих островов. Тогда (5.31) упрощается:

$$\partial_s \partial_s B_s + s^{-1} \partial_s B_s = s B_s B_\varphi^{-1} (\partial_s \partial_s B_\varphi + \partial_s s^{-1} B_\varphi). \quad (5.36)$$

Подставим (5.34) в (5.36) и сопоставим с (5.33). Тогда получим последовательно $d_\varphi A_2 = 0$, $d_\varphi A_3 = 0$ и т. д. Поэтому в секторе $A'OA''$ $B_s = 0$ и $\partial_\varphi = 0$, здесь поле осесимметрично. Но согласно разд. 5.4 в этом случае равновесие всюду осесимметрично, в то время как топология конфигурации рис. 5.19 не допускает осевой симметрии.

Для перехода к общему случаю воспользуемся выражением (5.35). Оно справедливо при $s \leq s_0(\varphi)$, $s_0(\varphi)$ — граница конфигурации, на которой $B_\perp = 0$. Удобно считать, что это выражение справедливо всюду, т. е. что при $s \geq s_0(\varphi)$ поле B_\perp быстро (скажем, экспоненциально) убывает с ростом s . Отсутствие слагаемого с $m = \pm 1$ в (5.35) означает, что

$$\int A(s, \varphi) \exp(-i\varphi) d\varphi = 0 \quad (5.37)$$

при произвольном s ! Это свойство, однако, не выполняется из-за того, что начало координат $s = 0$ расположено в точке, относительно которой конфигурация не обладает симметрией (см. рис. 5.19). Действительно, при $s > OA'$ $\int A(s, \varphi) \cos \varphi d\varphi \neq 0$ (φ отсчитывается от положительного направления оси x); при $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, где $\cos \varphi > 0$, это подынтегральное выраже-

ние обращается в нуль (без ограничения общности считаем, что $A = 0$ вне конфигурации), в то время как при $\pi/2 < \varphi < 3/2\pi$ $f(A) \neq 0$ и не меняет знака. Особенно отчетливо нарушение равенства (5.37) проявляется при асимптотически больших s , где поле хотя и слабое (по предположению экспоненциально мало), но все же не равно нулю. Здесь силовые линии представляют собой кривые, очень близкие к окружности, но с центром не в O -точке, а в X -точке (при $x = y \equiv 0$). Именно поэтому для больших s (5.37) нарушается. Следовательно, конфигурация рис. 5.19 не может находиться в равновесии.

Полукачественное объяснение отсутствия равновесия. Ввиду важности факта топологического неравновесия конфигурации рис. 5.19 дадим еще дополнительные разъяснения.

1. Прежде всего, отсутствие равновесия связано с тем, что полный z -ток каждого магнитного острова не равен нулю, причем z -ток обоих островов имеет одинаковый знак. Иначе говоря, мы имеем дело с притяжением двух параллельных токов. Следует, однако, иметь в виду, что это объяснение не доказательство. Дело в том, что токи во внешних по отношению к островам областях в принципе могут компенсировать это притяжение.

2. Конфигурация рис. 5.19 содержит две O -точки и одну X -точку. В более простом случае — наличие единственной O -точки (все силовые линии обходят вокруг нее) — равновесие непременно осесимметрично. Это утверждение доказывается при наличии нулевой линии [40] или если $V_{\perp} \rightarrow 0$ при $x, y \rightarrow \infty$ [42, 44], т. е. для ограниченной конфигурации. При доказательстве используется энергетический принцип (см. также [41]). Интуитивно кажется очевидным, что минимум энергии имеет место только для осевой симметрии. Это видно еще и из сходства уравнения равновесия (1.88) с уравнением гравитационного равновесия (1.132): фигуры равновесия небесных тел обладают осевой симметрией. Нулевая линия в виде окружности (и отвечающая этому случаю осевая симметрия всего равновесного поля) является, конечно, избранной формой. Все остальные деформированные нулевые линии «равноправны». Поэтому они должны в определенном смысле обладать одинаковыми свойствами: либо все они могут прийти к равновесию (не осесимметричному), либо ни одна из них. Но равновесие в виде слабого отклонения от осевой симметрии невозможно, потому и невозможно сильное отклонение.

3. Вернемся к рис. 5.19 и рассмотрим поле в секторе $A'OA$. Будем считать, что пунктирные линии ортогональны силовым. Обратимся к условию равновесия (1.88) с $f(A) = -\lambda^2 A + C$:

$$\Delta A = -\lambda^2 A + C. \quad (5.38)$$

Граничное условие для A в секторе $A'OA$ следующее: $\partial_n A = 0$ (задача Неймана). Тогда полное решение (5.38) представляет собой функцию $\psi_{\lambda} + C/\lambda^2$, ψ_{λ} — собственное решение с собственным значением λ . Нас, однако, устраивает только решение, у которого (дополнительно к задаче Неймана) $A = 0$ на кривой $A'A$, т. е.

здесь $\psi_\lambda = \text{const}$. Но такое вырождение возможно только, если кривая $A'A''$ — дуга окружности, и тогда согласно разд. 5.4 все силовые линии равновесия в секторе $A'O A''$ и в остальной части плоскости — окружности.

Утверждение, касающееся вырождения собственной функции, по-видимому, не вызывают сомнений. (Следует, однако, заметить, что в математических курсах нет соответствующей теоремы.) Но если это верно, то переход от $f(A)$ в принятом виде ($f(A) = -\lambda^2 A + C$) к общему несложен. Представим $f(A)$ в виде ряда

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(A), \quad f_1 = -\lambda^2 A + C, \quad (5.39)$$

$$|f_n| = \varepsilon |f_{n-1}|, \quad \varepsilon \ll 1.$$

Ищем решение (1.88) как разложение по малому параметру ε .

$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. В первом приближении уже получили, что A_1 — осесимметричная функция. Во втором имеем

$$\Delta A_2 + \lambda^2 A_2 = f_2(A_1). \quad (5.40)$$

Решение этого неоднородного уравнения с осесимметричным источником (правая часть) тоже, конечно, осесимметрично. В третьем приближении $\Delta A_3 + \lambda^2 A_3 = f_2(A_1 + A_2) - f_1(A_1) + f_3(A_1)$. Это уравнение эквивалентно (5.40): источник осесимметричен. Отсюда A_3 — осесимметричная функция. Продолжая таким образом процедуру дальше, в любом приближении получаем осевую симметрию [344].

4. Для задачи на собственные функции (5.40) соответствующее уравнение (5.14) записывается в аналитичном виде:

$$\Delta B_x = -\lambda^2 B_x, \quad \Delta B_y = -\lambda^2 B_y \quad (5.41)$$

с $B_x = 0$ и $B_y = 0$ на границе. Это означает, что имеется вырождение, отвечающее собственному значению λ^2 для данной граничной задачи: проекция поля на произвольную ось оказывается решением. Для простейшей топологии — с одной O -точкой (рис. 5.20, а) приведены два таких решения (рис. 5.20, б, в). Физически очевидно, что такое вырождение должно наступить при наличии осевой симметрии. Аналогично обстоит дело с полем более сложной топологии: две O -точки и одна X -точка, как на рис. 5.19.

Равновесие конфигурации рис. 5.19. В идеально проводящей вязкой среде (модель ВИП, см. разд. 5.3) равновесие поля должно наступить. Для конфигурации рис. 5.20 вопрос о равновесии решается весьма просто: поле становится осесимметричным. Что касается конфигурации рис. 5.19, то она является топологически неравновесной, т. е. соответствующее равновесие поля этой же топологии должно содержать скачки. Вопрос заключается в том, где именно они возникают. На первый взгляд кажется, что два магнитных острова просто сблизятся, образуя разрыв на оси y

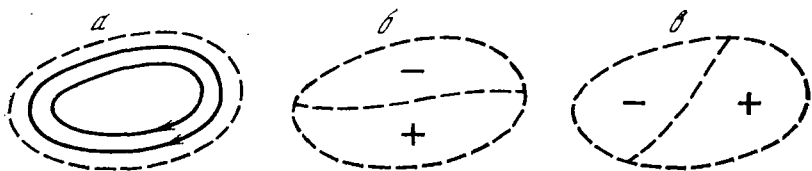


Рис. 5.20. Предполагаемое равновесие в виде собственного решения a — для уравнения для A ; b, v — для проекции магнитного поля на произвольную ось (5.45) (поле всюду обращается в нуль на штриховой линии)

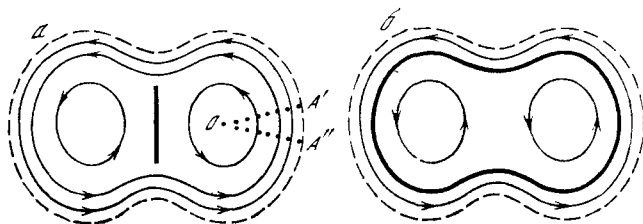


Рис. 5.21. Расположение разрывов (жирные линии) в равновесном состоянии a — предполагаемое расположение разрыва — только между островами; $б$ — реальное положение разрыва

(рис. 5.21). Однако, как сказано выше, в секторе $A'OA''$ (как и на рис. 5.19) равновесие по-прежнему должно быть осесимметричным, а значит, оно и всюду (кроме разве что «внутренней части», где равновесия нет, т. е. $P \neq \text{const}$ вдоль разрыва) должно быть осесимметричным! Кроме того, нетрудно убедиться в том, что поле в окрестности двух Y -точек — на каждом конце разрыва на оси y — не может находиться в равновесии (достаточно разложить решение (1.88) в окрестности Y -точки).

Единственный выход — это разделить сектор разрывом и вообще O -точки отделить от граничных условий, т. е. от нулевой линии (рис. 5.21, б). В этом случае все приведенные в данном случае доказательства и соображения теряют силу. Вдоль разрыва $P \neq \text{const}$, $j_z \neq \text{const}$, поэтому здесь равновесия нет. Но в окрестности, вернее, всюду, в области, кроме самого разрыва, равновесие должно наступить. С двух сторон скачка выполняется условие разрыва (5.2) (или (5.3)). Отметим, что в равновесии нет разрыва на оси y : как и выше, он по-прежнему несовместим с равновесием поля в окрестности Y -точек, даже при учете дополнительных скачков на имеющемся уже разрыве на рис. 5.21, б.

5.12. Магнитные поля в стратифицированных средах: учет силы тяжести

Сила тяжести приводит к неоднородности (стратификации) среды, т. е. зависимость от одной координаты z всегда имеется. Зависимость поля только от z — тривиальная задача. По этой причине

вопрос о равновесии практически любой конфигурации должен рассматриваться, как минимум, как двумерная задача.

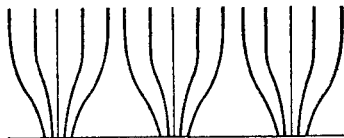
Вертикальные трубки. Пусть силовые линии параллельны оси z , трубка ограничена в плоскости xy , $B_z = 0$ вне некоторой области. Формально равновесие существует:

$$p + B_z^2/8\pi = p(\infty, z), \quad (5.42)$$

$$g\rho = -\partial_z p. \quad (5.43)$$

Такое равновесие в принципе может осуществляться в конвективной зоне Солнца (модель солнечного пятна или тонкой структуры?). Однако причудливое распределение температур, необхо-

Рис. 5.22. Выход тонко-структурных полей в корону



димое для реализации (5.42), (5.43), а также неисследованный вопрос об устойчивости ставит под сомнение реальность таких конфигураций.

Что касается атмосферы Солнца, то ввиду резкого падения давления с высотой равенство (5.42) может выполняться только до высот, где еще $\beta > 1$, при $\beta < 1$ (верхняя атмосфера, корона) выражение (5.42) не может выполняться. Здесь поле становится потенциальным. Силовые линии расходятся веером: именно так, как полагают, устроено поле пятна и так происходит с полем тонкой структуры при выходе его в корону (рис. 5.22).

Следует заметить, что скрученность трубки (β_ϕ -компонента) качественно не меняет этот вывод, так как последняя приводит к дополнительному расширению трубки (см. разд. 5.10). В частности, бессилое поле тоже не может существовать в виде тонкой трубки (см. разд. 5.6).

Плазменный слой в короне. Строго горизонтальное поле может еще существовать в виде плазменного слоя (B_x меняет знак на некоторой высоте). Если же поле хоть немного наклонено, то плазма стекает вниз вдоль нулевой линии, ее давление уже не способно уравновесить магнитное и равновесие становится невозможным. Особенно просто это можно увидеть на примере вертикального слоя, как, например, для поля стримера (см. рис. 5.2). Давление $p(\infty, z)$ и плотность $\rho(z)$ на нулевой линии быстро убывают с высотой из-за гидростатического равновесия (5.43). Поэтому (5.42) в окрестности плазменного слоя не выполняется: $p \ll B_z^2/8\pi$ (как обычно в короне), а $B_z^2/8\pi$ не убывает с высотой (или убывает медленно). По этой причине в окрестности нулевой линии образуется не плазменный слой, а ТС, т. е. толщина его определяется не балансом давлений, как в разд. 1.5 (см. (1.140)), а конечной проводимостью.

Аналогично обстоит дело с конфигурацией рис. 5.22. Если поля соседних магнитных трубок параллельны друг другу, то их поля в короне сливаются. Если же антипараллельны, то возникает нулевая линия с неизбежным образованием ТС.

Двумерные конфигурации. Известно, что магнитное равновесие в поле тяжести устанавливается так, чтобы на каждой силовой линии выполнялось гидростатическое равновесие. Иначе говоря, вдоль силовой линии давление меняется следующим образом:

$$p = p_0 \exp\left(-\int H^{-1} dz\right), \quad H = TR/g \quad (5.44)$$

(см. (1.36)); H — высота однородной атмосферы; p_0 — функция, постоянная на силовой линии. Величина H , вообще говоря, зависит от всех трех координат, но интегрирование в (5.44) проводится вдоль силовой линии. Это означает, что H берется как функция от x_0, y_0, z ; x_0, y_0 — координаты силовой линии на фотосфере $z = 0$. Поэтому экспонента в (5.44) зависит только от z .

В двумерном случае $\partial_x = 0$ условие равновесия имеет вид

$$\Delta A_x + \frac{1}{2} dB_x^2(A_x)/dA_x + 4\pi \exp\left(-\int_0^z dz'/H(y_0, z')\right) dp_0(A_x)/dA_x = 0. \quad (5.45)$$

В простейшем случае $B_x = 0$, $dp_0/dA_x = 0$ (5.45) отвечает потенциальному полю $\Delta A_x = 0$. Если $B_x \neq 0$, а $dp_0/dA_x = 0$, то поле бессилевое, конкретно для данной геометрии оно было рассмотрено в разд. 5.7. Наконец, при $H \rightarrow \infty$ сила тяжести не влияет на равновесие и (5.45) совпадает с (1.88).

Итак, сила тяжести (входящая только в экспоненту (5.45)) влияет на вид равновесной конфигурации, только если $dp_0/dA_x \neq 0$, т. е. если на фотосфере давление меняется. В противном случае (давление на фотосфере не зависит от координат) поле бессилевое или потенциальное, а давление падает с высотой по гидростатическому закону (зависимость только от z) вне всякой связи с конфигурацией поля. Рассмотрим частный случай $B_x = 0$, $T = \text{const}$. Тогда и $H = \text{const}$. Перейдем в новую (ортогональную) систему координат (y', z') , связанную с (y, z) следующим образом:

$$\begin{aligned} y' &= y_0 + 2H \exp(-z/2H) \sin(y/2H + \delta), \\ z' &= z_0 + 2H \exp(-z/2H) \cos(y/2H + \delta), \end{aligned}$$

где y_0, z_0, δ — константы. В новой системе (5.45) переходит в

$$(\partial^2/\partial y'^2 + \partial^2/\partial z'^2) A_x = f(A_x), \quad (5.46)$$

$$f(A_x) = -4\pi dp_0/dA_x.$$

Это уравнение совпадает с (1.88). Поэтому простейшими равновесными конфигурациями будут поля с силовыми линиями — прямыми и во втором случае — окружностями в координатах y', z' . В начальной системе координат семейство силовых линий

первой и второй конфигураций записывается в виде

$$A \sin (y/2H + \delta) + B \cos (y/2H + \delta) = C \exp (z/2H), \quad (5.47)$$

$$[y_0 + 2H \exp (-z/2H) \sin (y/2H + \delta)]^2 + [z_0 + 2H \exp (-z/2H) \cos (y/2H + \delta)]^2 = R^2. \quad (5.48)$$

Магнитная конфигурация, отвечающая (5.47), представляет собой арочную структуру, повторяющуюся с периодом $2\pi H$ (если $AB = 0$) или с периодом πH (если $AB \neq 0$) (рис. 5.23).

Что касается (5.48), то если в простейшем случае $y_0^2 + z_0^2 = R_0^2 = 0$, то силовые линии — прямые, параллельные оси y (очевидное равновесие). При $0 < R_0 < R$ силовые линии — волнообразные линии с периодом $4\pi H$, все они не замкнуты, уходят в $\pm \infty$ по координате y . При $R_0 \geq R$ часть силовых линий оказывается замкнутой. Наконец, при $R_0 \gg R$ силовые линии близки к окружностям. Характерный размер поля мал по сравнению с H , и силой тяжести можно пренебречь.

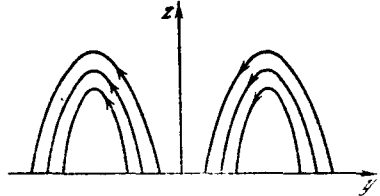


Рис. 5.23. Равновесная конфигурация в поле силы тяжести

Согласно результатам разд. 5.4 одно только присутствие нулевой линии в виде прямой вынуждает всю равновесную конфигурацию быть одномерной. В данном случае это относится к системе (y', z') . По этой причине присутствие нулевой линии в виде координатной (5.47) навязывает однозначный вид всего равновесия. Так, на рис. 5.23 ось z является как координатной линией ($C = 0, B = 0, \delta = 0$ в (5.47)), так и нулевой (из симметрии). Равновесие должно представлять собой арки, как на рис. 5.23, размер основания (или горизонтальный период) которых «квантуется», т. е. он равен $2\pi H$ или πH . Это чрезвычайно жесткое свойство в реальности, конечно, нарушается, в результате чего на оси z возникает ТС.

6.1. Потеря равновесия и неустойчивость

В предыдущей главе рассматривался вопрос о формировании ТС из-за потери равновесия. В качестве альтернативы часто привлекается неустойчивость. Иначе говоря, ищутся неустойчивости равновесия (если состояние неравновесно, то говорить об устойчивости не приходится), приводящие к формированию ТС.

Здесь, однако, возникает серьезная трудность. Практически все известные неустойчивости характеризуются мягким типом возбуждения. Это означает, что уже при слабом отклонении системы от устойчивого состояния возникает неустойчивость, которая возвращает конфигурацию в устойчивое состояние. Каким же образом достичь сильно неустойчивого состояния? Собственно говоря, это вопрос о накоплении энергии. Вернемся к примеру, проиллюстрированному на рис. 5.1. Начальное поле потенциально, т. е. равновесное и устойчивое (см. рис. 5.1, а). При вытягивании хвоста магнитосферы (см. рис. 5.1, б) появляется непотенциальная составляющая поля и тем самым свободная энергия, которая и может быть реализована. Однако даже при слабом вытягивании, т. е. при несильном отклонении от потенциального поля, развивается тиринг-неустойчивость (см. разд. 2.7), «сбрасывающая» свободную энергию. Впрочем, конкретно для хвоста магнитосферы этот вопрос решен: происходит стабилизация неустойчивости B_y -составляющей [249]. А для солнечных явлений эруптивного характера эта трудность не обсуждается.

Вторая трудность: теория устойчивости в подавляющем большинстве случаев строится как линейная. Между тем неустойчивость может стабилизироваться на слабонелинейном уровне. Именно так происходит с тиринг-неустойчивостью. В результате образуются очень маленькие острова (в отличие от рис. 5.1, в) и топология поля меняется слабо с малым энерговыделением.

Последовательные теории неустойчивости. Выше уже упоминалась работа [249], в которой указан выход из обоих трудностей. Имеет место накопление энергии с достаточно сильным вытягиванием хвоста магнитосферы. Нелинейная стадия осуществляется как взрывная фаза (см. разд. 2.7, а также [207]). В свете сказанного (см. конец разд. 5.5 о равновесии со слабым поперечным полем B_y (см. также рис. 5.1, б)) ясно, что реально это поле гораздо слабее, чем обычно полагается. Поэтому кажется целесообразным учесть анизотропную тиринг-неустойчивость (см. разд. 2.7).

Анизотропия, естественно, возникает из-за сжатия хвоста (см. [39 9] и [41]).

Связь тиринг-неустойчивости с пересоединением можно проследить на примере конфигурации рис. 1.1 с широм ($B_x \neq 0$). Линеаризованное уравнение (1.45) при $\text{div } \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(t, y) \exp i(xk_x + zk_z)$ и $\eta = \text{const}$ имеет вид

$$\partial_t \mathbf{V}' = i(\mathbf{V}^{(0)} \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{u}_y \partial_y \mathbf{V}^{(0)} + \eta \Delta \mathbf{V}', \quad (6.1)$$

где $\mathbf{V}^{(0)}$ — начальное поле; \mathbf{V}' — возмущение. Первые два члена правой части отвечают вмероженности. Третий член по порядку величины пренебрежимо мал. Его тем не менее следует учитывать там, где первые два обращаются в нуль.

Рассмотрим поверхность $y = y_0$, где y_0 находится из уравнения

$$\mathbf{V}^{(0)}(y_0) \mathbf{k} = 0. \quad (6.2)$$

Тогда существует поле скорости, такое, что $u_y(y_0) = 0$, и обращающее в нуль первые два члена правой части (6.1). Условие (6.2) следует сопоставить с (4.15), и имеет оно тот же физический смысл: движение на поверхности $y = y_0$, которую называют резонансной, не возмущает поля. Именно на этой поверхности конечная диссипация существенна, и здесь образуются магнитные острова. В частности, при отсутствии шира, $B_x = 0$, и из (6.2) следует $B_z^{(0)} k_z = 0$, $B_z^{(0)}(y_0) = 0$, т. е., как видно из рис. 1.1, резонансная поверхность есть $y = y_0 = 0$. Пересоединение происходит в плоскости рисунка yz , как на рис. 5.5, а. При наличии шира, $B_x \neq 0$, силовые линии пересоединяются, как на рис. 5.5, б, в. Резонансная поверхность может по-прежнему оставаться $y = 0$ (при $k_x = 0$). При $k_x \neq 0$ резонансная поверхность есть плоскость $y = y_0 \neq 0$, а пересоединение происходит в плоскости x^*z^* в системе координат x^*, y, z^* , повернутой на некоторый угол относительно оси y . В ней компонента B_z^* ведет себя, как на рис. 1.1, т. е. меняет знак, поэтому пересоединение возможно.

Заметим, что линейная стадия неустойчивости в данном случае быстро стабилизируется. Образующиеся острова — маленькие, так что разрыв всех силовых линий, т. е. существенное изменение топологии поля, не происходит. Зато возможна иная ситуация. Выражение (6.2) можно рассматривать как условие на \mathbf{k} при заданном y_0 . Нетрудно увидеть, что для произвольного y_0 существует такое \mathbf{k} , что (6.2) выполняется. Это означает, что острова (хотя и малые) образуются в окрестности произвольной плоскости $y = y_0$. Магнитные поверхности становятся «мохнатыми». Когда острова начинают перекрывать друг друга, возникают

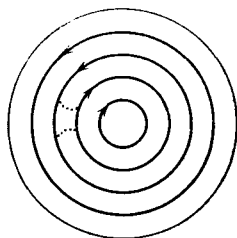


Рис. 6.1. Начальная конфигурация поля \mathbf{B}_\perp и пересоединение из-за неустойчивости

аномальный перенос тепла и эффективная магнитная диффузия. Это явление называют перколяцией (просачивание). Оно, по-видимому, имеет место в лобовой точке магнитосферы, где магнитное поле последней пересоединяется с межпланетным [250]. (Заметим, что, когда эти два поля антипараллельны, перколяция отсутствует, но зато может оказаться существенным анизотропный тиринг).

Аналогично обстоит дело в тороидальной и цилиндрической геометрии. Так, для последней (s, φ, z) начальное поле — $\mathbf{V}^{(0)} = \{0, B_\varphi^{(0)}(s), B_z^{(0)}(s)\}$, возмущение скорости — $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(s) \exp i(m\varphi + kz)$, а условие (6.2) записывается в виде

$$mB_\varphi^{(0)} + ksB_z^{(0)} = 0. \quad (6.3)$$

Острова образуются на резонансной поверхности $s = s_0$, s_0 удовлетворяет (6.3). В дальнейшем пересоединение происходит на винтовой поверхности. Компоненты поля на ней: $\mathbf{V}_\perp = \{B_s, B_2\}$, $B_2 = (mB_\varphi + ksB_z)/[m^2 + (ks)^2]^{1/2}$ [85, 86]. Конфигурация поля \mathbf{V}_\perp изображена на рис. 6.1. В начальном состоянии $B_s = 0$. На резонансной поверхности B_2 меняет знак. Пересоединение (пунктир) приводит к возникновению B_s -составляющей и появлению острова.

6.2. Направление процесса пересоединения

Пересоединение может происходить с любым полем. Даже в однородном поле специальными движениями можно сформировать остров, как на рис. 5.15, а. В гл. 3 это называлось «отщеплением петли» — явление, важное для динамо. Здесь нас, однако, интересует естественное направление процесса, вызванное электромагнитными силами (т. е. в приближении сильного поля, когда поле влияет на движение, а не наоборот). В частности, как мы видели в разд. 5.9, остров (или плазмод) самопроизвольно не образуется, а, напротив, замкнутые силовые линии пересоединяются с открытыми, в результате чего остров исчезает.

Вообще топологически неравновесные конфигурации эволюционируют следующим образом. Прежде всего формируется топологически достижимое равновесие со скачком поля. Точнее, в месте скачка возникает ТС и начинается пересоединение. В результате устанавливается диссипативно достижимое равновесие (см. разд. 5.2) и процесс заканчивается. Так, динамическая диссипация тороидального поля заканчивается полным его исчезновением (см. разд. 5.3). Поле стримера на рис. 5.2 «не успокоится» до тех пор, пока открытые силовые линии не замкнутся. При движении пятен X-точка может превратиться в нулевую линию (см. рис. 5.4, б), а значит, согласно разд. 5.3 в ТС (например, при движении пятен в y -направлении, рис. 5.11). Диссипативно достижимое равновесие представляет собой потенциальное поле с новыми граничными условиями, отвечающими сдвинутым пятнам. Соответственно пересоединение конфигурации рис. 5.7 закончит-

ся, когда нулевая линия исчезнет (она вообще несовместима с потенциальным полем) и возникнет X -точка: окончательно поле станет подобным тому, что изображено на рис. 5.11.

Потеря равновесия арки (см. рис. 5.10) приводит, как говорилось в разд. 5.7, к образованию транзиента. Эволюция поля, показанного на рис. 5.11, не изучена. Эволюция корональных полей, изображенных на рис. 5.13, заканчивается тем, что часть магнитного потока перебрасывается от пятна A к пятну D и от пятна C к пятну B . Топологически неинвариантные поля (см. разд. 5.8) в результате пересоединения упрощаются и становятся инвариантными. Острова топологически неравновесной розеточной структуры (см. рис. 5.19) полностью сливаются, остается одна O -точка.

Неустойчивость, приводящая к топологическому неравновесию. Вопрос о направлении процесса пересоединения при наличии неустойчивости менее очевиден (по сравнению с магнитным неравновесием). Так, тиринг-неустойчивость приводит к образованию островов, а последние, как только что сказано, имеют тенденцию к слиянию. Имеется даже неустойчивость слияния, в результате чего острова исчезают [133]. Так какой же процесс превалирует: рост островов или их исчезновение?

Еще пример. Рассмотрим равновесную цилиндрическую конфигурацию $\mathbf{V} = \{B_s = 0, B_\varphi(s), B_z(s)\}$ (модель скрученного поля, изображенного на рис. 5.12). Устойчива ли она? Оказывается, почти произвольная конфигурация неустойчива по отношению к винтовому тирингу. Действительно, фиксируем $s = s_0$, тогда для произвольных функций $B_\varphi(s)$ и $B_z(s)$ найдутся такие m и k , что (6.3) выполняется ($m/k = -s_0 B_z(s_0)/B_\varphi(s_0)$). Имеется, правда, исключение: $B_\varphi \equiv 0$ или $B_z \equiv 0$. В последнем случае для выполнения (6.3) оставшаяся ненулевая функция должна менять знак. Итак, практически каждое начальное поле рассматриваемого вида разрушается. К какому же состоянию приходит система после пересоединения? В каждом конкретном случае этот вопрос требует специального рассмотрения.

Обратимся к очень важному примеру. Пусть неустойчивость развивается на резонансной поверхности $s = s_0$. На рис. 6.1 окружность $s = s_0$ разделяет поля B_z разной полярности. После пересоединения образуется конфигурация с двумя O -точками и одной X -точкой наподобие рис. 5.19. Все выводы разд. 5.11 о топологическом равновесии такой конфигурации относятся и к изображенной на рис. 6.1, если поле быстро убывает при $s \rightarrow \infty$ (специфические граничные условия для тороидальных установок здесь не обсуждаются). Следовательно, поле (см. рис. 6.1) с пересоединенными силовыми линиями «не успокаивается». Для выяснения вопроса о направлении дальнейшего процесса (и не вернется ли система в начальное состояние) рассмотрим два случая.

1. Внутренний магнитный поток при $s < s_0$ (по часовой стрелке) меньше внешнего при $s_0 < s < R$, R — внешний радиус (против часовой стрелки).

2. Наоборот, внутренний поток больше внешнего.

Обратимся к первому случаю. Дальнейшее пересоединение внешнего магнитного потока с внутренним приведет к «раздеванию» и уничтожению острова (наподобие уничтожения плазмоида, см. разд. 5.9). В конце концов циркуляция всего поля будет происходить против часовой стрелки. Для того чтобы выяснить направление процесса, оценим магнитную энергию (на единицу длины по оси z , W_I) поля (см. рис. 6.1) и поля с циркуляцией одного направления (W_{II}) в предположении сохранения объема:

$$W_I = (1/8\pi k) [(A_z(s_0) - A_z(0))^2 + (A_z(s_0) - A_z(R))^2 (R + s_0)/(R - s_0)], \quad (6.4)$$

$$W_{II} = (1/8\pi k) (A_z(R) - A_z(s_0))^2, \quad (6.5)$$

где A_z — компонента вектор-потенциала («спиральный поток»),

$$A_z = - \int_0^s (mB_\varphi + ks'B_z) ds' \quad (\text{при } B_s = 0) \quad [218].$$

Видно, что $W_I > W_{II}$.

Методически полезно дать схематическую диаграмму — зависимость энергии W от некоего параметра λ , характеризующего топологию.

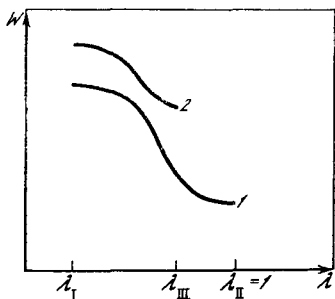


Рис. 6.2. Схематическое изображение зависимости магнитной энергии от топологии

Путь процесса выяснен: от состояния I (см. рис. 6.1) к состоянию II (аналог внутреннего срыва в токамаке [87]).

Не меньший интерес представляет второй случай. Легко понять, что теперь внутренний остров не может быть уничтожен. После пересоединения остатки острова (с циркуляцией по часовой стрелке) выходят наружу, а в оставшейся плазме формируется свой остров (с циркуляцией против часовой стрелки). Два получившихся острова отталкиваются друг от друга, как отталкиваются антипараллельные токи, и расходятся (аналог выброса плазмы на стенку при большом срыве в токамаке). Именно такое направление процесса. Об этом говорит оценка энергии состояния III

в виде двух островов:

$$W_{III} = (1/8\pi k) [(A_z(R) - A_z(0))^2 + (A_z(s_0) - A_z(R))^2]. \quad (6.6)$$

Сравнивая с (6.4), видим, что $W_I > W_{III}$. Соответствующая диаграмма эволюции изображена на рис. 6.2, кривая 2.

Важно подчеркнуть, что в обоих примерах начальное состояние равновесно, но неустойчиво. В результате неустойчивости конфигурация становится топологически неравновесной и перестройка поля продолжается. Это как бы другая трактовка сильно нелинейной стадии неустойчивости, причем без обращения к численному моделированию — до сих пор практически единственному методу исследования последней.

6.3. Реализация неустойчивостей и потеря равновесия в астрофизических условиях

Гипотеза Тэйлора. Эта гипотеза тоже задает направление процесса пересоединения, а именно: система должна релаксировать к бессилловому полю (1.91) с $\alpha = \text{const}$. Гипотеза разработана для тороидальных установок. И действительно, в пинчах с обратным полем (RFP) именно такое поле устанавливается (см. также численный счет [294]). Сам процесс установления иногда называют динамо [186] (отметим, что в токамаках этот режим не устанавливается [87]). Что касается астрофизических приложений, то, по-видимому, эта гипотеза значения не имеет (впрочем, она использовалась для объяснения нагрева короны [349]). Действительно, как говорилось в разд. 5.6, бессилловое поле с $\alpha = \text{const}$ обладает бесконечной энергией и поэтому нефизично (в тороидальной установке ситуация иная: имеются стенки, удерживающие конфигурацию). Реально α определяется из (5.21). Если искусственно создать такие граничные условия на фотосфере, что $\alpha = \text{const}$, то поле перестанет быть бессилловым, конфигурация начнет открываться (см. разд. 7.9).

Нерезистивная неустойчивость. Если на границе $z = 0$ поле \mathbf{B} жестко задано, то задано и α (см. (5.21)) и тем самым бессилловое поле при $z > 0$ однозначно определено (см. разд. 5.6). В такой постановке задачи оно и устойчиво, ибо нет другого состояния, к которому могла бы прийти конфигурация в результате развития неустойчивости.

Реально граничные условия могут быть либо кинематическими, либо динамическими (см. разд. 5.7). В первом случае положение оснований силовых линий определяется движениями на фотосфере. Рассмотрим конфигурацию, возникшую в результате некоторого смещения оснований силовых линий и являющуюся равновесной. Обратимся конкретно к полю, показанному на рис. 5.12, только в «выпрямленной» геометрии, как изложено в разд. 5.8. А именно на фоне первоначально однородного поля $\mathbf{B} = \{0, 0, B_z\}$ происходит закрутка оснований силовых линий на плоскостях $z = 0, L$. При сохранении осевой симметрии генерируется поле

$B_s = 0$, $B_\varphi \neq 0$, $B_z \neq 0$ (правая часть рис. 5.14). При угле закрутки больше некоторого критического и такого, что $B_\varphi \approx B_z$, конфигурация становится неустойчивой по отношению к нерезистивным винтовым возмущениям [141]. При использовании этого факта возникают две трудности, указанные в разд. 6.1. Кроме того, неизвестно, к какому состоянию должна прийти система в результате развития неустойчивости. Следует также иметь в виду, что критерий $B_\varphi \approx B_z$ совпадает с критерием потери равновесия (см. разд. 5.7).

Поэтому можно предложить следующую картину. Если неустойчивость развивается все же раньше потери равновесия (при росте B_φ -составляющей), то медленный выход за порог устойчивости (напомним, что фотосферные движения медленные) приведет к появлению винтовых изгибов силовой трубки.

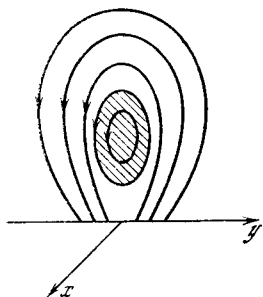


Рис. 6.3. Проекция арки с магнитным островом (заштрихован) на плоскость yz

Но в каждый момент времени трубка будет находиться в равновесии и на пороге устойчивости. Наконец, при достаточно большом значении B_φ произойдет потеря равновесия. Качественно эта картина неотличима от описанной в разд. 5.7. Аналогично обстоит дело с горизонтальной скрученной трубкой, отличающейся от магнитной арки на рис. 5.10 наличием острова, как на рис. 6.3. Когда B_x станет больше некоторого критического значения, развивается нерезистивная винтовая неустойчивость [141].

В конце концов начнется расширение арки (как на рис. 5.10, б), быть может, несколько искаженной винтовыми возмущениями.

Резистивная неустойчивость: силовые линии закреплены на фотосфере. Как говорилось в разд. 6.1, последовательный подход в теории неустойчивости был разработан только для геофизических задач. В частности, при исследовании устойчивости бессилловых полей выяснилось, что поля с $\alpha \neq \text{const}$ (их иногда называют нелинейными бессилловыми полями) неустойчивы, поэтому в конечном состоянии должно установиться поле с $\alpha = \text{const}$ (другая трактовка гипотезы Тэйлора). Однако в действительности и поле с $\alpha = \text{const}$ тоже неустойчиво (не говоря уже о бесконечной энергии такого поля, см. разд. 5.6). Это видно при исследовании поля $\mathbf{V} = B_0 \{\cos \alpha z, \sin \alpha z, 0\}$: критерий (6.2) для него выполняется [15]. Аналогично для осесимметричного поля $B_s = 0$, $B_\varphi = J_1(\alpha, s)$, $B_z = J_0(\alpha s)$; на этот раз выполняется критерий (6.3) [141]. То же самое относится к полю с однородным закручиванием: $B_s = 0$, $B_\varphi = s/R (1 + s^2/R^2)$, $B_z = (1 + s^2/R^2)^{-1}$.

Практически всякое поле неустойчиво! Однако главный вопрос — о конечном состоянии или, что эквивалентно, о направлении процесса гересоединения. Остановимся на кинематических

граничных условиях, когда силовые линии жестко закреплены на фотосфере. Рассмотрим опять скрученную осесимметричную трубку (правая часть рис. 5.14). При не слишком малом значении B_ϕ критерий (6.3) выполняется. Но роль закрепленных концов силовых линий здесь не изучена. Скорее всего они приведут к полной стабилизации, неустойчивость исчезнет. Дело в том, что после пересоединения (при закрепленных концах!) конфигурация стала бы неинвариантной (см. разд. 5.8). Поскольку последняя сама по себе неравновесна то должно произойти возвращение к начальному состоянию. Иными словами, пересоединение не является энергетически выгодным процессом.

Не столь однозначен ответ для магнитной арки на рис. 5.10. При наличии шира, $B_x \neq 0$, возникшего в результате смещения оснований арок, соседние силовые линии могут пересоединиться так, как показано на рис. 5,5, б, в. Легко понять, что при этом, во-первых, будет потеряна симметрия $\partial/\partial x = 0$, т. е. поле начнет зависеть от x . Во-вторых, нарушится также симметрия относительно оси z : силовая линия, выходящая из точки $y = -y_0, z = 0$ (на фотосфере), замыкается уже не на точку $y = y_0, z = 0$, как на рис. 5.10, а, а на $y = y_0 + \Delta y_0, z = 0$. А линия, выходящая из $y = -y_0 - \Delta y_0, z = 0$, замыкается на точку $y = y_0, z = 0$. В проекции на некую винтовую поверхность это пересоединение происходит, как на рис. 6.1, но только продолжается оно «не до конца». Иначе говоря, в отличие от разд. 6.2 конечная осесимметричная конфигурация (состояние II) не достигается. Именно поэтому после пересоединения $\partial/\partial x \neq 0$. Все это связано с закрепленностью концов силовых линий. Однако развивается ли в действительности такая неустойчивость и (если да) при каких условиях, неизвестно.

Резистивная неустойчивость: часть магнитного потока не закреплена. Это возможно в двух случаях: при наличии острова у магнитной арки (как на рис. 6.3) или для динамических граничных условий. Обратимся к первой возможности. Силовые линии, соответствующие магнитному острову, представляют собой «винты», параллельные оси x (с учетом B_x -составляющей, не изображенной на рис. 6.3) и не замыкающиеся на фотосферу.

В связи с этим полезно вернуться к вопросу о неоднозначности бессиловых решений при заданных $B_x (z = 0)$ и $B_z (z = 0)$ и к обсуждаемой возможности перескока системы с одного решения на другое (отождествляемого с резким изменением топологии поля, например солнечной вспышкой [403, 195], см. разд. 5.7). При этом переход, как предполагалось, осуществляется из-за неустойчивости. При этом, однако, не во всех работах такого рода (см. обзор [141]) было показано, что этот переход диссипативно достигим (см. конец разд. 5.2). Иными словами, не всегда ясно, что пересоединение приведет к нужному изменению топологии.

Остановимся на классе задач, в которых этот вопрос выяснен. Рассмотрим горизонтальную осесимметричную скрученную трубку радиуса R . Ось симметрии параллельна оси x и находится на

высоте h над поверхностью фотосферы (тогда надо считать, что на рис. 6.3 все силовые линии — окружности). Остров в этом случае доходит до фотосферы, его радиус — h . Воспользуемся результатами разд. 6.2. Если магнитный поток острова (при $0 < s < h$) меньше внешнего при $h < s < R$ (случай 1), то развитие винтовой тиринг-неустойчивости приведет к исчезновению острова. В конечном состоянии конфигурация станет подобной типу, показанному на рис. 5.10, а, но все силовые линии — окружности. Если же магнитный поток больше внешнего (случай 2), то скрученная трубка, соответствующая внутренней части острова, после пересоединения выбрасывается вверх (в виде транзientа (?)). Оставшееся поле опять принимает такой вид, как на рис. 5.10, а.

Обсудим вторую возможность — динамические граничные условия. Рассмотрим скрученную вертикальную магнитную трубку между двумя плоскостями $z = 0, L$ (см. рис. 5.12 в выпрямленной геометрии).

Поперечное поле $\mathbf{V}_\perp = \{B_x, B_y, 0\}$ изображено на рис. 6.1. Винтовой тиринг (см. разд. 6.1) при динамических граничных условиях может сдвигать силовые линии на фотосфере ($u_x(z = 0, L) \neq 0, u_y(z = 0, L) \neq 0$), но по-прежнему отсутствует поток вещества поперек фотосферы ($u_z(z = 0, L) = 0$). Тогда винтовое движение вырождается в плоское ($k_z = 0$). Критерий (6.3) может выполняться, если B_ψ -составляющая меняет знак, а A_z — немонотонная функция. Таким образом, следует считать, что в данном случае на рис. 6.1 изображена проекция поля на плоскость xy (а не на винтовую поверхность, как в разд. 6.1). Дальнейшее развитие неустойчивости вполне аналогично описанному в разд. 6.1. В конечном состоянии A_z — монотонная функция и B_ψ не меняет знака либо в одной трубке, либо в двух трубках с разной циркуляцией поля.

Еще одна возможность реализации пересоединения с динамическими граничными условиями — это столкновение двух трубок с одинаковой циркуляцией поля. Только здесь вместо пересоединения, показанного пунктиром на рис. 6.1, происходит пересоединение внешних силовых линий и образуется конфигурация с розеточной структурой (см. рис. 5.18). Дальнейшая эволюция, как говорилось в разд. 5.11, сводится к слиянию магнитных островов, а весь процесс — к сжатию трубок или, как принято говорить, к слиянию магнитных петель.

В заключение трех разделов, посвященных неустойчивости (см. разд. 6.1—6.3), отметим следующее. Прежде всего, неустойчивость может быть одной из причин, вызывающих топологическое неравновесие. Более того, во всех рассмотренных примерах можно вообще обойтись без неустойчивости. Действительно, обратимся к конфигурации рис. 6.3. Она не может быть сформирована из поля без магнитного острова с помощью смещения оснований арок (эволюция последнего показана на рис. 5.10, а, б). Такая конфигурация может возникнуть в результате всплытия

уже скрученной горизонтальной трубки. При этом предполагается, что всплывшая трубка приходит в конце концов в равновесное (бессиловое) состояние. Равновесие неустойчиво, в результате чего возникает топологически неравновесная конфигурация. Но с таким же успехом можно предположить, что всплывающая скрученная трубка сама по себе топологически неравновесна. Например, если магнитный остров (см. рис. 6.3) уже начал пересоединяться с внешним потоком, т. е. начальная трубка уже содержит пересоединенные силовые линии (см. рис 6.1, пунктир). Или в другом варианте: магнитный остров (см. рис 6.3) всплывающего поля содержит B_x -составляющую слишком большой напряженности. В этом случае (подобно результатам разд. 5.7) равновесие не устанавливается. Аналогично обстоит дело со сливающимися трубками. С равным успехом можно предположить, что сливаются первоначально полностью независимые трубки, как в настоящем разделе, или же в начальный момент они уже были топологически связаны, как в разд. 5.11.

6.4. Скорость процесса пересоединения

Хотя изучение ТС началось именно с процесса пересоединения, с работ Свита [391] и Паркера [330], до настоящего времени здесь много неясного. Проблема исследуется с двух сторон: во-первых, важно найти достаточно быстрый механизм пересоединения, во-вторых, выяснить, в каких случаях какой механизм действует. Понятие топологического неравновесия позволяет, как нам кажется, продвинуться в этих вопросах. Итак, пусть в результате топологического неравновесия возник ТС. Спрашивается, за какое время произойдет пересоединение, т. е. система перейдет в конечное диссипативно достижимое состояние?

Перечислим известные механизмы пересоединения. Заметим прежде, что все они найдены при следующих предположениях.

1. Рассматривается стационарное пересоединение. Например, противоположно направленные поля (см. рис. 1.1), не убывающие на бесконечности, сближаются друг с другом. Или рассматривается поведение полей в окрестности X -точки, причем на бесконечности (или на краю рассматриваемой области) поля не убывают. Тем самым решается система уравнений (1.39), (1.44), (1.45) при $\partial_t = 0$.

2. Как правило, вязкость не учитывается, $\kappa = \zeta = 0$ в (1.44).

3. Рассматриваются двумерные течения, $\partial_x = 0$. Такая постановка характерна для большинства работ.

4. Обычно принимается, что течение несжимаемо ($\text{div } \mathbf{u} = 0$).

5. Продольное поле B_x , как правило, не учитывается.

Течение Паркера—Свита (рис. 6.4, а). Движение переносит поле к оси z со скоростью v_d . Здесь, в окрестности ТС (параллельного оси z), происходит диссипация на толщине δ . Причем из условия стационарности следует: $v_d = \eta/\delta$ (ср. с (2.125)). Вещество, пришедшее с полем к оси z , выбрасывается вдоль нее с альве-



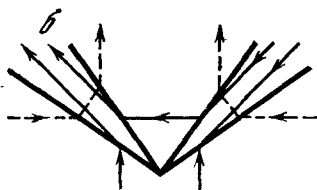
Рис. 6.4. Механизмы пересоединения

а — течение Паркера—Свита;

б — модель Зоннерупа;

в — модель Печка. Движение изображено штриховыми стрелками; сплошные стрелки — силовые линии магнитного поля; жирные линии — фронты ударных волн.

На рис. 6.4, б, в показана только верхняя часть



новской скоростью c_A . Пусть длина ТС вдоль оси z есть L , тогда из баланса вещества следует

$$\rho_0 v_d L = \rho_c \bar{c}_A \delta, \quad (6.7)$$

где ρ_0 — средняя плотность; ρ_c — плотность в центре ТС; величина c_A посчитана по плотности ρ_c со средним полем. Пересчитаем ее на среднюю альвеновскую скорость $c_A = \bar{c}_A (\rho_c/\rho_0)^{1/2}$. Сопоставляя (6.7) с (2.125), получим

$$\delta = L (\rho_0/\rho_c)^{1/4} L_m^{-1/2}, \quad (6.8)$$

$$v_d = c_A (\rho_c/\rho_0)^{1/4} L_m^{-1/2}. \quad (6.9)$$

Толщина ТС, вычисленная по (6.8), в $(\rho_c/\rho_0)^{1/4}$ раз больше, чем подсчитанная по (2.138), на практике $(\rho_c/\rho_0)^{1/4} \approx 1$. В реальных условиях поле имеет ограниченный размер в y -направлении, обозначим его a . Тогда все поле пройдет до оси z со скоростью v_d и весь процесс пересоединения закончится за время

$$t_{PS} = a/v_d = (a/c_A) L_m^{1/2} (\rho_0/\rho_c)^{1/4}. \quad (6.10)$$

Обычная диссипация продолжалась бы гораздо большее время aL/η , но все же t_{PS} значительно больше альвеновского a/c_A (2.137).

Последнее обстоятельство означает, в частности, следующее. Скорость порядка (6.9) при подстановке в уравнение движения (1.44) дает пренебрежимо малый вклад. Следовательно, для того чтобы это уравнение удовлетворялось, плазма должна находиться в равновесии почти всюду, кроме области ТС (конфигурация не может быть в равновесии всюду, поскольку она топологически неравновесна). Итак, почти всюду, кроме ТС, выполняется условие равновесия (1.88). Это равновесие адиабатически медленно со временем t_{PS} меняется. Обратимся теперь к окрестности ТС. Проекция на ось y силы инерции

$$(u_y \partial_y + u_z \partial_z) u_y \approx v_d^2 / \delta = c_A^2 / L L_m^{1/2}$$

все еще мала по сравнению с электромагнитной $\sim c_A^2/\delta = c_A^2 L_m^{1/2} L^{-1}$. Поэтому она компенсируется давлением

$$p + B_z^2/8\pi = p(0, z), \quad (6.11)$$

B_z меняется очень быстро: на длине δ , поэтому так же быстро согласно (6.11) растет в ТС давление, оно максимально при $y = 0$, где $B_z = 0$.

Модели быстрого пересоединения (6.9) оказалась малой, поскольку все вещество, движущееся в направлении y , масштаба L вдоль оси z необходимо выбросить сквозь тонкий ТС в направлении z (см. (6.7), $v_d \sim \delta/L$). Процесс будет происходить гораздо скорее, если выброс вещества осуществляется не сквозь тонкий слой, а тоже на масштабе L . В принципе это возможно, поскольку само пересоединение происходит лишь в окрестности X -точки.

Ввиду сложности нелинейных уравнений было предложено разделить всю плоскость yz на минимальное число подплоскостей, в которых и скорость, и магнитное поле постоянны и меняются скачком на фронтах стоячих ударных волн, разделяющих эти подплоскости. Легко понять, что для данной топологии поля (окрестность X -точки) необходимы минимум два фронта, или два разрыва (см. рис. 6.4, б, модель Зоннерупа). При этом можно считать, что в (6.7) $L = \delta$, так что

$$v_d = c_A. \quad (6.12)$$

Конечно, это равенство оценочное (см. подробнее в [139]). Если же оставить один скачок (см. рис. 6.4, в), то получается решения Печека [346]. Теперь в основных областях поле уже не постоянно и в окрестности X -точки мало. Поэтому скорость пересоединения несколько меньше, чем (6.12):

$$v_d = \pi c_A / \ln L_m. \quad (6.13)$$

Однако фактически оценки (6.12) и (6.13) совпадают. Диссипация реального поля размера a в направлении y происходит за альевновское время a/c_A , так что эти два механизма уже не предполагают квазистационарного затухания: процесс происходит достаточно быстро. Надо сказать, что не все численные расчеты подтверждают наличие двух быстрых режимов (см. разд. 6.9). Наконец, быстрое пересоединение дает анизотропный тиринг (см. инкремент (2.129), разд. 2.7). Он, однако, работает только в бесстолкновительной плазме (хвост [399] и лобовая точка магнитосферы Земли).

Реализация режимов пересоединения. Концентрация топологического неравновесия позволяет решить, с какой скоростью происходит процесс пересоединения в данном конкретном случае. Убедимся в этом на двух примерах. Обратимся прежде всего к ТС, образуемому при изменении граничных условий (движение пятен) для плазмы низкого давления при отсутствии продоль-

ного поля $B_x = 0$ (см. разд. 5.4 и рис. 5.4). Ясно, что поле всюду, кроме области, занимаемой ТС, находится в равновесии — оно просто потенциально. В модели ВИП (см. разд. 5.3) мы имеем дело просто со скачком поля или δ -образным током, а в высокопроводящей среде — с течением Паркера—Свита. При этом поле квазистационарно, т. е. потенциально почти всюду и медленно меняется. Надо сказать, что практически во всех случаях, рассмотренных в гл. 5, мы имеем дело именно с такой ситуацией: поле вне ТС стационарно.

Исключением является розеточная структура (см. рис. 5.19). Действительно, в модели ВИП равновесие осуществляется с разрывом, как показано на рис. 5.21. При учете конечной проводимости

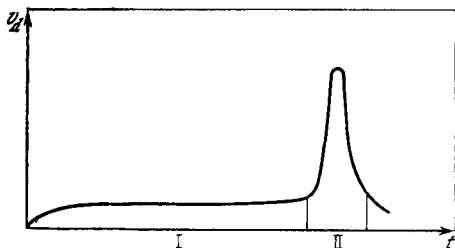


Рис. 6.5. Скорость пересоединения розеточной структуры

Этап I (и тем самым весь процесс слияния островов) происходит за большое время t_{ps} ; этап II — за альвеновское время

мости разрыв размывается и превращается в систему ударных волн, как в картине Печка (ср. с рис. 6.4, в, где дается окрестность X-точки). Таким образом, получается, что произвольно большая, но конечная проводимость исключает возможность стационарной (или квазистационарной) конфигурации. Поэтому здесь должен осуществляться режим Печка—Зоннерупа. Пересоединение, приводящее к слиянию островов, — процесс быстрый. Заметим, что при самом начале слияния островов, когда внешний магнитный поток очень мал и поэтому мала сила, сближающая два острова, скорость пересоединения тоже мала. Этот этап по скорости определяется темпом развития тиринг-неустойчивости, т. е. $v_d = c_A L_m^{-2/3}$. Только потом, когда существенная доля потока островов будет переброшена во внешний поток, скорость пересоединения резко увеличится. Процесс происходит взрывообразно (рис. 6.5).

Обсуждение других возможностей пересоединения. Как говорилось в настоящем разделе, этот процесс рассматривают при определенных упрощающих предположениях. По-видимому, не все из перечисленных пяти предположений являются критичными. Очевидно только, что учет продольного поля (допущение 5) должен существенно изменить процесс.

Действительно, пусть, например, реализуется течение Паркера—Свита, скажем, для стримера (см. рис. 5.2). Если $B_x = 0$, то течение и пересоединение происходит в плоскости yz , как на рис. 6.4. При немалых значениях B_x ситуация существенно меняется. Пусть для упрощения $B_x^2/8\pi \gg p$. Тогда в (6.11) следует

писать вместо p величину $P = B_x^2/8\pi$. Но это равенство противоречит выражению $B_x = B_x(A_x)$ (см. (1.88)), которое получается из требования отсутствия сил, действующих в x -направлении. Действительно, в окрестности X -точки из (6.11) следует, что $B_x^2/8\pi$, а значит, и B_x постоянны на прямых $y = \text{const}$, которые, конечно, не совпадают с силовыми линиями (см. рис. 6.4, а). Иначе говоря, установление течения Паркера—Свита (а значит, соотношения (6.11)) неизбежно связано с появлением силы $(B_y\partial_y + B_z\partial_z) B_x$, действующей в направлении x , и с дополнительным движением плазмы в этом направлении. К чему это приведет, неясно. По-видимому, квазистационарный режим нарушится и возникнут ударные волны Зоннерупа—Печека.

6.5. Квазистационарные токовые слои и накопление энергии

Время пересоединения (6.10) есть, кроме того, и время существования ТС. Обычно оно оказывается большим (порядка нескольких суток для солнечной короны), и поэтому сам ТС можно считать квазистационарным. Это обстоятельство объясняет долгое и устойчивое существование стримеров и таких явлений, как протуберанцы. Последние тоже существуют в ТС (см. разд. 7.10). Квазистационарные ТС приводят к нагреву плазмы. Они могут обеспечить нагрев короны и наблюдаются в виде усиления яркости, возможно, в виде рентгеновских ярких точек.

Накопление энергии. Об этом уже говорилось в начале разд. 6.1 на примере рис. 5.1. Вообще четкая формулировка проблемы накопления энергии может быть поставлена для потенциальных в начальный момент полей. Тогда конфигурация вообще обладает минимальной энергией, нет свободной энергии для выделения. Необходимо теми или иными способами сформировать непотенциальную составляющую поля, энергия которой может выделяться. Для непотенциальных полей (например, скрученных трубок, см. разд. 5.10, 5.11) такой проблемы нет. Свободная энергия представляет собой разницу энергий начального и конечного состояний (см. разд. 6.2 и оценки (6.4)—(6.6)), причем конечное состояние не представляет собой потенциального поля! Да и для потенциальных в начальный момент полей формирование непотенциальной составляющей не всегда приводит к накоплению свободной энергии. Так, смещение оснований арок (см. рис. 5.10) генерирует B_x -составляющую, но ее энергия отнюдь не представляет собой свободную энергию.

Проблема накопления формулируется однозначно: когда весь ток непотенциальной составляющей поля сосредоточен в ТС, в остальной (основной) части поле потенциально. Примером могут служить топологически неравновесные конфигурации плазмы низкого давления, $\beta \ll 1$, ТС у которых возникает в результате медленного изменения граничных условий (движение или всплытие пятен). Так, в частности, возникает ТС у плоского поля (в плос-

кости yz , $B_x = 0$) в месте бывшей X -точки (см. рис. 5.4 и разд. 5.4). Или на сепаратрисной поверхности при изменении расстояния между пятнами (см. рис. 5.13).

Если движение пятен настолько медленно, что скорость его меньше скорости пересоединения (6.9), то происходит эффективная релаксация системы к новым граничным условиям. Иначе говоря, поле адиабатически подстраивается под граничные условия, оно почти всюду потенциально с очень малыми ТС. Но, несмотря на малую скорость пятен, она все же может оказаться больше скорости (6.9) ввиду малости последней. В этом случае размер ТС растет [349] и начинается накопление энергии.

Для оценки накопленной энергии или энергии тока в ТС уточним обозначения. Пусть ТС расположен так же, как на рис. 6.4, а. Его толщину в направлении y обозначим δ (а характерный масштаб поля в этом же направлении — a), длину в направлении z — буквой L , в направлении x — L_x . Тогда энергия тока

$$W_H = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B} dx \approx \frac{B_i^2 L^2 L_x}{8\pi}; \quad (6.14)$$

здесь B_i — величина скачка магнитного поля. На начальном этапе движения пятен скачок B_i мал, малой является также величина L . В дальнейшем B_i и L возрастают и B_i достигает характерной величины окружающего поля, L — характерного размера системы, а энергия W становится сравнимой с энергией потенциальной (невозмущенной) составляющей поля.

Следует подчеркнуть, что оценка (6.14) представляет энергию тока в ТС или магнитного поля, созданного этим током, во всем пространстве. В самом ТС сосредоточена лишь (δ/L) -я часть этой энергии, она и выделяется при внезапном разрыве ТС. Полная энергия (6.14) выделится только после окончания процесса пересоединения, когда система придет в топологически равновесное состояние.

Энерговыведение. В ТС происходит преобразование магнитной энергии в тепловую (и ускоренных частиц) и в кинетическую. Тепловая энергия выделяется за счет джоулева нагрева (см., например, (1.80)). Полная энергия, которая выделяется в ТС, оценивается как

$$W_b = t_{PS} \int \mathbf{E} \mathbf{j} dx = t_{PS} \int \frac{j^2}{\sigma} dx \approx \frac{1}{4\pi} B_i^2 a L L_x \quad (6.15)$$

(мы воспользовались (6.8) и (6.10)), что практически совпадает с (6.14). Таким образом, вся накопленная энергия выделяется в тепло и ускоренные частицы, но за большое время t_{PS} . Поэтому мощность энерговыведения мала.

Для сравнения оценим энерговыведение при быстром пересоединении (6.4). Поскольку в данном случае $\delta \approx L$ и $\delta = \eta/c_A$ (ввиду того что $v_d = c_A$), энерговыведение в окрестности X -точки мало. Основная диссипация происходит на фронтах ударных волн, толщина которых тоже η/c_A , а длина L . Тогда за время a/c_A

выделится энергия, по оценке точно совпадающая с (6.15). Мощность энерговыделения при этом оценивается как

$$d_t W_b = B^2 L L_\lambda c_A / 4\pi \quad (6.16)$$

и представляет собой максимально большое значение.

Заметим, что розеточная структура (см. рис. 5.19) характеризуется большой скоростью пересоединения, так же как и другие процессы слияния магнитных островов (см. разд. 6.2). В частности, для конфигурации рис. 5.19 можно оценить энергию начального состояния W_I (в виде двух независимых осесимметричных трубок радиуса R) и конечного W_{II} (одна трубка, получившаяся в результате слияния двух). Подобно (6.4), (6.5), имеем

$$W_I = 2L_x (A_x(0) - A_x(R))^2 / 8\pi, \quad (6.17)$$

$$W_{II} = L_x (A_x(0) - A_x(R))^2 / 8\pi. \quad (6.18)$$

Видно, что W_I в два раза превышает W_{II} . И аналогично при сравнении энергий (6.4), (6.5) видим, что начальная превышает конечную на величину порядка ее самой. Из кривой на рис. 6.5 видно, что эта энергия выделяется не сразу, поэтому ее можно трактовать как зависимость мощности энерговыделения от времени.

6.6. Токовые слои и микротурбулентность

Как говорилось в разд. 1.6, токовые скорости u_d^* в обычных условиях малы, $u_d \ll u_{Ti}$, так что плазменная турбулентность не возбуждается. Но при возбуждении ТС из-за топологического неравновесия токовая скорость становится большой. Таким образом, плазменная турбулентность является следствием, а не причиной возникновения ТС.

Пусть микротурбулентность так или иначе возбуждена. Теперь, казалось бы, турбулентная проводимость значительно ускорит процесс пересоединения. Это, однако, не так. Дело в том, что при уменьшении σ согласно (6.8) сразу возрастет толщина ТС $\delta \sim \sigma^{-1/2}$ и токовая скорость упадет. Неустойчивость, приводящая к микротурбулентности, выключится. На самом же деле турбулентная проводимость держится на пороговом значении так, чтобы $u_d \approx u_{Ti}$ (см., например, критерий (2.120)). Поэтому согласно (1.134) получим [94] $\delta = r_i / \beta$ (см. (2.139)). Здесь $\beta = = p$ (ТС) $4\pi/B^2$, p (ТС) — давление в ТС, B — характерное. Поэтому для ТС типа изображенного на рис. 5.4, 6 $\beta = 1$ (хотя начальное $\beta(0) \ll 1$). Отсюда, пользуясь (6.7), получим

$$v_d = c_A r_i / \beta L, \quad (6.19)$$

$$t_{PS} = a/v_d = a\beta L / c_A r_i. \quad (6.20)$$

Из-за огромного значения величины L/r_i время процесса весьма велико. Эффективный коэффициент магнитной диффузии η_{eff} оп-

ределяется с помощью (6.19) и (2.139):

$$\eta_{\text{eff}} = \delta v_d = \max \{c_A r_i^2 / \beta^2 L, \eta\} \leq l_p^2 v_{\text{eff}} \quad (6.21)$$

(см. (1.45) и (2.121)).

Конечно, эти формулы справедливы, если микротурбулентность действительно включилась. Это значит, что δ по (2.139) больше δ по (6.8), v_d по (6.19) больше v_d по (6.9) и $\eta_{\text{eff}} > \eta$. Надо сказать, что численно η_{eff} оказывается весьма скромной величиной и в лучшем случае превышает η , т. е. турбулентное сопротивление малоэффективно. Заметим, что часто используют максимальное значение $\eta_{\text{eff}} = l_p^2 v_{\text{eff}}$ в (6.21), что неверно: сопротивление держится на пороговом значении.

Для быстрого пересоединения (2.139), конечно, не меняется, $v_d = c_A$, $t = a/c_A$, а

$$\eta_{\text{eff}} = \delta c_A = c_A r_i / \beta \leq l_p^2 v_{\text{eff}} \quad (6.22)$$

Эта величина η_{eff} (много большая, чем (6.21)) уже может играть некоторую роль в качестве турбулентного сопротивления. Впрочем, величина η не входит ни во время пересоединения a/c_A , ни в энерговыделение (6.15), ни в мощность (6.16). Поэтому микротурбулентность является побочным эффектом быстрого пересоединения.

Роль тиринг-неустойчивости. Плазменную турбулентность привлекают для объяснения бурного энерговыделения в ТС (солнечных вспышек, например). Было бы идеально, если бы можно было просто подставить турбулентную пороводимость с помощью формулы (2.124), например, в расчет эффективного числа Re_m . Оно тогда получится вовсе не большим, в результате чего время пересоединения (6.10) станет малым. В предыдущем пункте мы видели, что эта процедура непоследовательна. В принципе для эффективности действия микротурбулентность должна быть возбуждена всюду (не только в ТС). Это видно, в частности, на примере тиринг-неустойчивости. Последняя тоже приводит к возрастанию эффективного числа столкновений (с магнитными неоднородностями — островами, генерируемыми тирингом). Так, ТС Паркера—Свита сам по себе может быть неустойчив по отношению к тирингу. Формально инкремент оказывается большим (из-за малой толщины δ). Допустим, что острова образуются достаточно быстро в слое (в окрестности оси z , см. рис. 6.4, а). Для продолжения процесса пересоединения необходимо выбросить вещество вдоль ТС, т. е. оси z (см. разд. 6.4). Выброс может осуществляться со скоростью, не большей c_A . Но тогда не важно, имеют ли силовые линии вид, изображенный на рис. 6.4, а, или сюда еще накладываются магнитные острова. Таким образом, гипотетическое действие тиринга на ТС Паркера—Свита не является заметным процессом.

И это все потому, что тиринг возбужден только в ТС. При наличии шира (B_x -составляющей, $\partial/\partial x = 0$) возможно возбужде-

ние островов во всей области поля — перколяция (см. разд. 6.1). Просачивание силовых линий происходит через всю область, причем время диффузии, конечно, меньше омического (1.79). Но оно во всяком случае не может быть меньше обратного инкремента тиринга (2.132). А последнее не сильно отличается от t_{PS} (6.10). Таким образом, плазменная турбулентность не меняет скорость пересоединения существенным образом.

В заключение отметим: в бесстолкновительной плазме формирование ТС в результате топологического неравновесия неизбежно сопровождается микротурбулентностью и вызывает скачок поля или δ -ток. Дальнейшая эволюция поля, т. е. диссипация, неизбежно связана с плазменной турбулентностью. В этой книге нас больше будут интересовать ТС в столкновительной плазме (солнечная хромосфера и корона). В этом случае микротурбулентность играет определенную роль, но, как мы видели выше, не решающую.

6.7. МГД-турбулентность и токовые слои

В гл. 4 говорилось об уменьшении масштаба поля из-за действия турбулентности. Можно сказать, что происходит формирование ТС, а затем быстрая диссипация (или генерация) поля. Конечно, МГД-турбулентность должна приводить к ускорению диссипации поля в ТС, возникших по другим причинам, например из-за топологического неравновесия. Много исследований по этому вопросу проводилось численно в двумерных моделях. Было показано, что, кроме роста тока (т. е. величины $\text{rot } \mathbf{V}$ в областях, которые можно назвать ТС), происходит рост завихренности $\text{rot } \mathbf{u}$ [309, 350]. Начальная конфигурация изображена на рис. 1.1, причем в систему «закладывается» турбулентность, т. е. предполагается, что в начальный момент уже существуют вихри.

В целом, конечно, турбулентность не только приводит к появлению многочисленных (стохастических) ТС, но и ускоряет диссипацию основного поля (см. рис. 1.1 и обзор [350]). К аналогичному эффекту приводит давление МГД-волн, если пондеромоторная сила ускоряет плазму в направлении ТС [366, 367].

Конечно, численные эксперименты проводятся для не слишком больших чисел Re_m ($\sim 10^3$) и L_m ($\sim 10^4$). Поэтому важно понять, в какой степени влияет турбулентность на ускорение процесса пересоединения в реальном (для астрофизики) случае очень большого числа L_m ($\sim 10^8$ и больше). Что может предсказать теория относительности турбулентной диффузии? Она, конечно, приводит к быстрой диссипации поля с турбулентным коэффициентом диффузии D_T (см. (4.67) и оценку (4.81)). Это утверждение, однако, справедливо, если кинетическая энергия превышает энергию начального поля. В настоящей главе ситуация обратная: энергия поля (которая вообще не растет) превышает кинетическую. В этом случае, как говорилось в разд. 4.13, турбулентная диффузия становится неэффективной. В частности, согласно (4.91) при

$|\langle \mathbf{V} \rangle| \geq u \sqrt{4\pi\rho}$ турбулентность вообще не играет роли и $D_T = \eta$. (Это, конечно, оценка. На самом деле будет $D_T \gg \eta$, но превышение D_T над η несущественно.) Все дело в том, что движение не способно сколько-нибудь заметно запутывать силовые линии, вызывая диффузию. Заметим, что само по себе наличие стохастической составляющей поля не приводит к ускорению диффузии основного поля: флуктуации будут диссипировать за короткое время, а среднее поле $\langle \mathbf{V} \rangle$ — медленно, согласно уравнению $\partial_t \langle \mathbf{V} \rangle = \eta \Delta \langle \mathbf{V} \rangle$. Конечно, взаимодействующие моды ускорят этот процесс [350], но трудно ожидать, что при предельно малых η время пересоединения станет благодаря этому равным $\sim t_A$ (2.137) или, скажем, $10t_A$.

Обсудим роль желобковой неустойчивости. Примем в первом приближении, что внутри ТС поле вообще отсутствует, так что плазма ограничена магнитными стенками. Конфигурация неустойчива по отношению к желобковым возмущениям с инкрементом $\gamma = c_A \sqrt{\delta/R}$, R — радиус кривизны силовых линий стенки. Плазма выбрасывается поперек ТС со скоростью $v_d = \gamma \delta = c_A \sqrt{\delta/R}$. Если предположить, что стенка имеет волнистый характер с $R \approx 10\delta$, то выброс плазмы будет осуществляться со скоростью, близкой к c_A . Можно представить, что плазма, переносщая магнитное поле, движется к ТС со скоростью $v_d \approx c_A$, а навстречу — пузырьки плазмы без поля, уносящие вещество из ТС [332]. Эта картина, однако, принципиально, усложняется, если учесть, что внутри ТС поле не отсутствует, оно только слабее окружающего. Теперь плазма выбрасывается уже с полем, и натяжение силовых линий стремится вернуть ее в первоначальное положение [94]. Это обстоятельство свело бы действенность механизма фактически на нет, если бы не следующее. Как говорилось в конце разд. 6.6, тиринг-неустойчивость приведет к образованию островов в ТС, причем в отличие от сказанного там плазма с островами может выбрасываться не вдоль ТС, а поперек из-за желобковой неустойчивости (волнистый характер стенки обеспечивает тиринг). Тогда натяжение силовых линий не играет роли, поскольку выброс осуществляется в изолированных структурах — островах. Надо признать, что сказанное — гипотеза, причем слабо обоснованная хотя бы потому, что тиринг-неустойчивость быстро выходит на насыщение и образовавшиеся острова малы [197] (см. также разд. 2.7).

Если исключить этот гипотетический пример, то все сказанное выше в настоящем разделе приводит к одному выводу: МГД-турбулентность хотя и ускоряет процесс пересоединения, но не настолько, чтобы довести его до времени $10t_A$ и меньше. Тем не менее значение МГД-турбулентности в ТС огромно! Дело в том, что при быстром пересоединении скорость движения плазмы почти альвеновская. Как только наступит этап II (см. рис. 6.5), т. е. собственно быстрое пересоединение, за короткое время возникнут большие скорости плазмы, порядка альвеновской (для короны

это несколько сот километров в секунду!). Быстро возбудится МГД-турбулентность, произойдет резкая активизация, генерация ударных волн, выброс вещества и т. п. Конечно, это приведет и к диссипации (уже кинетической, а не магнитной) энергии и к ускорению частиц.

6.8. Синергетические свойства

Диссипация поля в ТС далеко не всегда приводит к полной диссипации поля. В сущности, известен только один пример — тороидальных полей (см. разд. 5.3), когда происходит именно так. Нельзя даже сказать, что после диссипации в ТС поле всегда становится потенциальным. Наверное, более общим свойством ТС является рост масштаба или синергетика. Это проявляется в слиянии магнитных островов (или скрученных трубок), см. разд. 5.11. Если до слияния были две трубки радиуса R , то после слияния — одна большего радиуса $\sqrt{2}R$. Аналогично происходит с конфигурацией рис. 6.1. До пересоединения трубка радиуса R содержала два масштаба: $s_0 < R$ и $R - s_0$, после пересоединения — один масштаб R . Этот процесс, в свою очередь, аналогичен «раздеванию» плазмоедов в квазиоднородном магнитном поле (см. разд. 5.9). И здесь до пересоединения имелся плазмоед со своим размером, после осталось только квазиоднородное поле большого масштаба (по сравнению с размером плазмоеда).

Синергетические свойства в явном виде описаны в разд. 5.10. В начальный момент имеется целый набор плотно упакованных ячеек, как на рис. 5.17. В результате пересоединения количество ячеек значительно сокращается и они становятся более крупными. Это явление напоминает слияние вихрей в двумерной турбулентности (см. разд. 4.2). Еще большее сходство получается при рассмотрении двумерной МГД-турбулентности. В этом случае вместо плотно упакованных ячеек (см. рис. 5.17) нужно рассматривать столкновение уединенных структур, т. е. отдельных скрученных трубок. При столкновении (неупругом) двух ячеек одинаковой циркуляции возникает розеточная структура (см. рис. 5.18), и они в конце концов сольются. Столкновение двух ячеек разной циркуляции неизбежно упругое, они не могут взаимодействовать (с помощью процесса пересоединения). В результате все ячейки одинаковой циркуляции объединятся в одну, а с разной циркуляцией — в другую. Останется всего две ячейки, и в системе исчезнет всякая стохастичность (напомним, что в отличие от этого плотно упакованные ячейки приводят к конфигурации с возможно большим числом ячеек, хотя и меньшим, чем вначале, см. разд. 5.10).

Судьба уединенных МГД-структур в общем трехмерном случае не столь очевидна. Но, по всей вероятности, здесь тоже происходит объединение структур. В общем (среднем) магнитном поле они разворачиваются таким образом, чтобы пересоединение уничтожило каждую (см. разд. 5.9). При столкновении малого

плазмоида с большим происходит то же самое: малый «растворяется» в большом, как в квазиоднородном поле. Да и столкновения структур одинаковых размеров (зависящих, вообще говоря, от ориентации полей в них) едва ли заканчиваются «безболезненно». Можно поэтому предположить, что взаимодействие структур заканчивается, как и в двумерном случае, слиянием в одну-две гигантские структуры и турбулентность тем самым выключается (или остаются пульсации, не сильно искажающие гигантские структуры).

Надо, однако, подчеркнуть, что реальная МГД-турбулентность все же сложнее. Описанным образом происходит взаимодействие структур при отсутствии внешнего источника энергии. В реальной МГД-турбулентности имеется источник (например, конвекция, вызванная конвективной неустойчивостью). Поэтому даже в двумерной турбулентности имеется поток энергии в область малых масштабов, кроме обратного синергетического процесса (см. разд. 4.2). Как мы видели в разд. 4.11, МГД-турбулентность представляет собой не только структуры (популяции I), но тонкоструктурные поля (популяция II) (см. рис. 4.2). Можно предположить, что взаимодействие тонкоструктурных элементов популяции II приведет к образованию новых структур, привнося вклад в популяцию I. А сами структуры — популяция I — взаимодействуя, приведут к образованию крупномасштабного поля (КП). Хотя качественные оценки пока не сделаны, этот процесс может оказаться единственным, объясняющим КП. Дело в том, что обычные механизмы динамо выключаются при очень слабых КП (см. формулы (4.88), (4.91). разд. 4.11).

6.9. Моделирование токовых слоев

Лабораторное моделирование. Обзор экспериментов по ТС был дан в работах [189, 350]. Многие исследования посвящены возникновению островов (из-за тиринга) и их слиянию в z - и θ -пинчах в токамаках [218], а также в специальных установках, моделирующих столкновение полей разных направлений [173, 4]. Представляет интерес аналогия ТС с процессами, происходящими в плазменной фокусе [283].

Непосредственное моделирование формирования ТС в окрестности X -точки квазиоднородного поля (как на рис. 5.4) было проведено в работе [24] и др. (см. обзор Сыроватского [392]). Аналогичные процессы происходят между двумя параллельными «цилиндрическими» токами, помещенными в столкновительную плазму: между ними как раз и возникает квазиоднородное поле с X -точкой [189].

В отличие от этих экспериментов в Калифорнийском университете моделировались ТС в бесстолкновительной плазме между токами, текущими в двух пластинах [388]. Отметим также моделирование обтекания солнечным ветром магнитосферы Земли и формирования ТС в лобовой точке магнитосферы [190]. Процессы

слияния магнитных трубок в астрофизических условиях целесообразно сопоставить со слиянием токовых жгутов, предложенным для нагрева плазмы в токамаках [326, 379].

Как отмечалось в [350], в лабораторных условиях трудно достичь большого числа Re_m , а значит, и L_m . Кроме того, различные пристеночные эффекты затрудняют интерпретацию экспериментов.

Гидродинамическое моделирование. Полезной оказывается аналогия (1.131) стационарной гидродинамики и МГД-равновесия. Стационарные вихри Россби (типа Красного Пятна Юпитера, например) [5, 129, 155] имеют аналог в виде равновесных магнитных конфигураций. Большой интерес представляет обратное. В гл. 5 утверждается, в частности, что конфигурации рис. 5.17—5.19 не находятся в равновесии. Значит, линии такой же топологии (например, розеточной структуры) нестационарны. И действительно, линии тока в виде, представленном на рис. 5.17, моделируют двумерную турбулентность, и эта аналогия иллюстрирует процесс укрупнения масштабов (ср. разд. 5.10). Что касается розеточной структуры (см. рис. 5.18, 5.19), то слияние магнитных островов аналогично слиянию вихрей [156, 60].

Надо, впрочем, оговориться, что при переходе от статических процессов (равновесие, стационарное течение) к динамическим (слияние магнитных трубок и вихрей) следует помнить, что аналогия нарушается. Как видно из уравнения движения в форме (1.124), сила $[u\omega] = [u \text{ rot } u]$ аналогична электромагнитной $[\text{rot } \mathbf{B}, \mathbf{B}]$, но имеет обратный знак. Поэтому параллельные вихри не притягиваются (как параллельные токи), а отталкиваются. Кроме того, в вещество заморожены не линии тока, а вихри, что уводит нас от аналогии (1.131) и приводит к (1.123). Тем не менее гидродинамическое моделирование топологического неравновесия может представить большой интерес, тем более что в лаборатории нетрудно достичь довольно больших чисел Рейнольдса Re (и гораздо труднее — больших чисел Re_m и L_m).

Численное моделирование. Наибольшее число работ по ТС посвящено именно численному моделированию. Мы перечислим только основные направления, отсылая читателя за подробностями к обзору [350].

1. Многие исследования посвящены изучению тиринг-неустойчивости (см. например, [231]). Тиринг может развиваться, если концы силовых линий закреплены на поверхности фотосферы [245]. Это процесс медленного пересоединения, который, как утверждается в [351, 349], может перейти к быстрому режиму Печера (имеется, впрочем, обратная точка зрения, согласно которой наступает стабилизация тиринга [197]).

2. По-видимому, большая часть работ посвящена исследованию вынужденного образования ТС, когда на границе области задаются встречные скорости, переносящие плазму и поле к X -точке (как, например, на рис. 5.3) или в общем случае к сепаратрисной поверхности [23]. В другом варианте встречные скорости

вызывают вынужденное пересоединение в плазменном слое хвоста магнитосферы [297]. Вынужденный характер этого процесса здесь ясно виден, так как в [297] (и во многих других работах) рассматривается несжимаемая жидкость. Поэтому встречные скорости не могут вызвать утоньшения плазменного слоя, жидкость должна растекаться, с неизбежностью вызывая пересоединение и формирование островов (плазмойдов).

Одним из важнейших вопросов является в этом случае определение скорости пересоединения в стационарном режиме. В ряде работ (см. например, [383, 350]) находятся условия быстрого пересоединения Печек—Зоннерупа (см. разд. 6.4). Согласно же результатам Бискамп [199, 200], быстрое пересоединение вообще невозможно! По мнению Бискамп, оно может появиться только при включении турбулентной проводимости.

3. Часть работ посвящена расчету слияния магнитных островов. В одной из первых работ [352] подтверждается взрывообразный характер пересоединения (см. разд. 6.4 и рис. 6.5). И в дальнейшем во многих работах утверждается, что слияние происходит достаточно быстро [245, 393, 370]. Однако Бискамп приходит к выводу, что слияние медленное [201, 198]. По-видимому, все же при очень больших «астрофизических» значениях числа L_m стационарное пересоединение невозможно и наступает быстрое пересоединение (см. рис. 6.5, этап II, а также разд. 6.4), где неявно предполагается, что число L_m асимптотически велико. Критические числа $L_m(\infty)$ (при $L_m > L_m(\infty)$ наступает асимптотический режим) неизвестны. Можно ожидать, что они велики: так же как в сходной (в численном смысле) задаче динамо, число $Re_m = 10^3$ оказалось ниже критического (см. разд. 3.5).

4. Наконец, ряд работ посвящен учету турбулентности или турбулентным ТС [309]. О роли МГД-турбулентности уже говорилось в разд. 6.7. Что касается микротурбулентности, то надо сказать, что в численных расчетах она учитывается формально. Если ток превышает некоторое критическое значение, то она включается и расчетная проводимость существенно меняется. В действительности, как мы видели в разд. 6.6, проводимость может быть пороговой, не сильно отличающейся от нормальной.

6.10. Способы формирования токовых слоев. Классификация

Вынужденное и спонтанное формирование. ТС возникают по разным причинам. Как мы видели в разд. 3.1, в приближении слабого поля (в теории динамо) ТС формируется вынужденным образом и происходит усиление поля одновременно с уменьшением масштаба. В качестве примера можно привести не только динамо, но и формирование ТС в окрестности лобовой точки магнитосферы Земли (скорость ветра больше альвеновской).

При этом скорость задана в каждой точке и не зависит от поля. Можно задать скорость только на краю области в виде встречных

движений, как на рис. 5.3. Если $\beta \geq 1$ или $B_x \neq 0$, то образование ТС (см. рис. 5.4) тоже вынужденное: у конфигурации «нет другого выхода» (см. 5.1). Движение теперь отчасти зависит от поля. «Отчасти», поскольку и здесь возможна ситуация, когда происходит усиление поля [350]. Но даже когда оно полностью зависит от поля, например если скорость на границе много меньше альвеновской, такое формирование ТС несомненно вынужденное.

Действительно, в реальных условиях (солнечной короны) нет встречных движений, даже если всплывает новое поле, X-точка может просто подниматься, не образуя ТС (см. разд. 5.1). Иное дело при $\beta \ll 1$ и $B_x = 0$. Тогда подъем нового магнитного потока или просто изменение граничных условий (движение пятен, например) действительно выведет двумерное поле из равновесия, точнее, приведет к топологическому неравновесию, а значит, к формированию ТС (см. разд. 5.4). Аналогично из-за движения пятен создается ТС на сепаратрисной поверхности (см. рис. 5.13). В этих примерах ТС формируется отчасти вынужденным образом (он вынуждается граничными условиями, если вернуть пятна на их первоначальные положения, то ТС исчезает), отчасти «сам по себе» (ибо здесь нет заданных встречных потоков вещества, сжимающих противоположно направленные поля). Поэтому такое формирование ТС можно назвать *квазивынужденным*.

Напомним, что в разд. 5.3 говорилось о трех способах возникновения топологического неравновесия. Второй уже упоминался выше: из-за изменения граничных условий. Первый (начальное поле топологически неравновесно) и третий (потеря равновесия из-за неустойчивости) приводят к спонтанному формированию ТС. Действительно, розеточная структура (см. рис. 5.18, 5.19) топологически неравновесна и в ней «сам по себе» с неизбежностью формируется ТС. Аналогично неустойчивость конфигурации рис. 6.1 тоже приводит к потере равновесия и формированию ТС (см. разд. 6.2). Граничные условия только не должны «мешать» этому процессу, т. е. силовые линии должны быть закреплены на фотосфере. Для этого либо сами взаимодействующие трубки располагаются горизонтально вдоль магнитной арки (см. рис. 6.3), либо имеют место динамические граничные условия на фотосфере (см. разд. 6.3).

В геофизике вопрос о спонтанном и вынужденном пересоединении в хвосте магнитосферы широко дискутируется [374]. В изложенных выше терминах опишем этот процесс следующим образом. При вытягивании хвоста магнитосферы (см. рис. 5.1) происходит вынужденное сжатие или уплотнение плазменного слоя. Но поперечное поле (B_y -составляющая) стабилизирует тиринг-неустойчивость до тех пор, пока толщина слоя не станет меньше критической. После этого включается тиринг и плазменный слой превращается в ТС (т. е. возникает диссипация) спонтанным образом).

Время жизни ТС. Другой способ классификации проводится по времени жизни: долгоживущие и короткоживущие ТС. При

возникновении топологического неравновесия возникает течение, не усиливающее магнитное поле (что противоречило бы закону сохранения энергии), а формирующее разрыв типа движения (2.119) (см. разд. 2.9). Уменьшение масштаба происходит до тех пор, пока не включится конечная проводимость. Все это происходит довольно быстро — за альвеновское время. А здесь все определяется скоростью процесса пересоединения (см. разд. 6.4). При малой скорости ТС становится квазистационарным (см. разд. 6.5), при большой (близкой к альвеновской) он живет короткое время.

Вопрос о том, какой именно режим пересоединения — медленный или быстрый — возникает в каждом конкретном случае и в общем виде, не решен. Чрезвычайно полезной оказалась модель вязкой идеально проводящей среды (ВИП, см. разд. 5.3). Если в модели ВИП устанавливается равновесие со скачком с антипараллельными полями, то в реальной плазме конечной проводимости устанавливается медленный режим Паркера—Свита (см. разд. 5.4). Если же в модели ВИП создается скачок без изменения знака поля (как в случае розеточной структуры, рис. 5.21, б), то пересоединение существенно нестационарно и происходит за альвеновское время (режим Печка—Зоннерупа) (см. разд. 6.4). Существует также возможность перехода медленного пересоединения в быстрое из-за действия желобковой неустойчивости, вызывающей нечто вроде МГД-турбулентности. Но эта возможность в большой степени гипотетическая (см. разд. 6.7).

Глава 7. МАГНИТОГИДРОДИНАМИКА СОЛНЦА (С ВКЛЮЧЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ДАЛЬНЕЙ АСТРОФИЗИКИ)

В этой главе мы не можем осветить все относящиеся к этой теме вопросы и отсылаем читателя к монографии [141]. Нас будут интересовать только аспекты, связанные с турбулентностью и ТС.

7.1. Перемешивание солнечных недр

Общее строение Солнца можно представить следующим образом. Внутри Солнца находится ядро ($r < 0,25R_{\odot}$), где выделяется энергия, и зона лучистого переноса ($r < 0,7R_{\odot}$), в которой переносится только лучистая энергия, а движения, как считается, практически отсутствуют. Выше, $0,7R_{\odot} < r < R_{\odot}$, располагается конвективная зона. Здесь перенос энергии осуществляется развитой турбулентной конвекцией. Процессы в конвективной зоне оказывают решающее влияние на то, что происходит в фотосфере, хромосфере, короне и даже в солнечном ветре (и тем самым в магнитосфере Земли).

До настоящего времени гораздо меньше внимания уделялось влиянию конвективной зоны на подконвективные процессы. Между тем, как говорилось в разд. 3.5, 4.12, 4.13, в конвективной зоне генерируется сильное ($\sim (3 \div 5) \cdot 10^3$ Гс) тороидальное поле. Оно проникает и в подконвективную зону: диамагнитный перенос привел бы к накачке поля, в $Re_m^{1/2}$ раз превышающего его значение в конвективной зоне (см. разд. 4.12). Однако нелинейный парамагнетизм значительно ослабляет диамагнитный перенос, остается только перенос из-за $\nabla\rho$ (см. разд. 4.13). Поэтому примем, что в подконвективной зоне на границе с конвективной генерируется тороидальное поле с напряженностью, совпадающей с напряженностью поля в конвективной зоне (это нижняя оценка).

Поскольку тороидальное поле топологически неравновесно (см. разд. 5.3), возникает течение типа изображенного на рис. 5.7, очень напоминающее гигантскую (в полрадиуса Солнца) конвекцию, затягивающую поле внутрь. Скорость конвекции медленная, приближенно альвеновская. Да она и убывает с глубиной, так как плотность растет. Взяв для оценки наименьшее значение скорости (при максимальной плотности в центре Солнца), получим, что перенос поля в глубь Солнца происходит за время $t_c = 0,7R_c/c_A$ ($\sim 10^2$ см/с) и $t_c \approx 3$ года. Конечно, само по себе проникшее вглубь поле едва ли сказывается существенным образом

на происходящих там процессах. Важнее то, что происходит перемешивание зоны лучистого переноса за несколько лет (так что традиционное представление о почти полной неподвижности подконвективного вещества нарушается). А перемешивание солнечного ядра происходит за время порядка года. Заметим, что приведенные оценки очень грубые. Но даже если время перемешивания на порядок больше, вывод качественно не меняется, ибо оно на много порядков меньше космологических времен.

Как и говорилось в разд. 5.3, тороидальные поля создают ТС на экваторе и полюсах, где происходит диссипация и в конечном счете исчезновение этих полей.

7.2. Конвективная зона: дифференциальное вращение

Дифференциальное вращение является одним из самых заметных явлений на Солнце и «дирижером» важнейших магнитных явлений. В частности, оно вытягивает сильные тороидальные поля (см. разд. 3.5). Согласно распространенной точке зрения, именно последние приводят к возникновению магнитных полей активных областей (групп пятен), ответственных за главные проявления солнечной активности.

Уже почти столетие известно широтное дифференциальное вращение: уменьшение (на 30%) угловой скорости Ω от экватора к полюсу. Считается также, что Ω зависит и от r , иначе нет согласования с солнечным циклом.

Основные идеи. Дифференциальное вращение газа Галактики можно объяснить как некое остаточное, поскольку вязкость (даже турбулентная) не способна сгладить его за космологические времена. Звезды Галактики движутся по кеплеровским орбитам (тоже нетвердотельно), но они практически бесстолкновительны. В звездах и планетах вязкость газа существенна. Термодинамическое равновесие представляет собой твердотельно вращающееся тело [111]. Всякое дифференциальное вращение диссипирует (сглаживается) из-за вязкости: $\omega = \text{const}$ является точным решением уравнения для вихря (1.122). Легко понять, что всякое меридиональное движение со скоростью $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, 0\}$ приводит к переносу вихря, и $\omega = \text{const}$ уже не будет решением. Стационарным решением теперь будет $\omega = \omega(r, \theta)$, а значит, и угловая скорость $\Omega = \omega/2$ будет зависеть от координат. Вопрос теперь заключается в происхождении переноса вихря или переноса углового момента.

Аккреция (падение) газа на черную дыру приводит также к переносу момента, в результате чего газ вращается дифференциально. Вращающаяся звезда (Солнце) не находится в термодинамическом равновесии: имеется мощный лучистый перенос энергии в радиальном направлении. Кроме того, звезда слегка приплюснута из-за вращения. По этой причине полюса должны быть горячее экватора на поверхности: они «ближе» к центру Солнца, откуда и идет тепло. В результате возникнет меридио-

нальный «ветер» или циркуляция и поэтому дифференциальное вращение. Эта гипотеза, однако, не получила подтверждения: различие температур на полюсах и экваторе не наблюдается [238], видимо, сплюснутость слишком мала.

В связи с этим стали привлекать турбулентность (или турбулентную конвекцию) конвективной зоны. Перенос вихря — турбулентный — подобен переносу магнитного поля со скоростью $\bar{U}^{(T)}$ (4.44), (4.45), недаром имеется аналогия $\mathbf{V} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ (1.123). Аналогия, однако, неполная. Во-первых, α -эффект, или генерация вихря, невозможен: это противоречило бы закону сохранения полного углового момента. Во-вторых, перенос поля \mathbf{V} происходит из-за неоднородности среды (см. разд. 4.12, 4.13), в то время как перенос $\boldsymbol{\omega}$ — из-за анизотропии. Как говорилось в разд. 4.2, анизотропия приводит к еще одному эффекту — отрицательной вязкости. Последняя тоже, конечно, приводит к дифференциальному вращению, перекачивая энергию от самых больших ячеек к крупномасштабному течению, т. е. вращению. По существу, это слияние ячеек.

Из-за наличия двух процессов — отрицательной вязкости и переноса — существуют два подхода к дифференциальному вращению на Солнце. В первом рассматривается взаимодействие гигантских ячеек с вращением. Обычные ячейки служат в этом подходе для перенормировки молекулярной вязкости. Гигантские ячейки, или, иначе, вихри Россби, могут сливаться и взаимодействовать с вращением, если обратное число Россби велико. По существу, это связано с «двумеризацией» турбулентности (см. условие (4.10)), когда движение представляет собой двумерные валы, протянувшиеся с севера на юг через все Солнце. Расчеты такого рода могут проводиться только численно, и поэтому отрицательная вязкость в явном виде здесь не возникает [256].

Существование гигантских ячеек оспаривается и подвергается сомнению [238] (см., впрочем, [373]). По этой причине разрабатывается второй подход — взаимодействие турбулентной конвекции с вращением [239, 362]. Надо сказать, что и здесь в расчетах возникает отрицательная вязкость [281], но ее действием на вращение до настоящего времени пренебрегали.

Анизотропная конвекция. Уравнение для $U = [x\Omega]$ получается точно так же, как в разд. 4.1 уравнение для крупномасштабной скорости, только его записывают в сферической системе координат. Мы, однако, воспользуемся локальной декартовой системой: z (индекс 3) соответствует вертикальному направлению, x , y (индексы 1, 2) — горизонтальные оси, причем линейная скорость вращения направлена по оси x ($U_\varphi \equiv U_x \equiv U_1$). Для учета турбулентности необходимо выписать тензор напряжений Рейнольдса $T_{ij} = \rho \langle u_i u_j \rangle$. Согласно (1.44) уравнение движения запишется в виде $\partial_i \rho U_i = -\partial_j (T_{ij} + \delta_{ij} p)$. Проектируя его на ось x , получим условие стационарного движения ($\partial_t = 0$)

$$\partial_j T_{1j} = \partial_2 T_{12} + \partial_3 T_{13} = 0, \quad (7.1)$$

$\partial_1 = 0$ из-за осевой симметрии. Локальная система координат вращается с некой средней угловой скоростью $\Omega_0 = \text{const}$. Тензор T_{ij} можно разбить на две части:

$$T_{ij} = Q_{ij}(\Omega_0) + \sigma_{ij}(\nabla\Omega). \quad (7.2)$$

Вклад σ_{ij} отвечает турбулентной вязкости, $\hat{\sigma} \sim \nabla\Omega$. Если $\bar{Q} = 0$, то решение (7.1) будет $\nabla\Omega = 0$, $\Omega = \text{const}$, т. е. дифференциальное вращение отсутствует. Только при $\bar{Q} \neq 0$ появляется поток углового момента, и $\Omega = \text{const}$ уже не является решением (7.1). При этом $Q_{12} (\equiv Q_{q\theta})$ и $Q_{13} (\equiv Q_{q\tau})$ соответствуют широтному и вертикальному переносу углового момента. То есть при $Q_{12} \neq 0$ решение Ω должно зависеть от θ , а при $Q_{13} \neq 0$ $\Omega = \Omega(r)$. Итак, задача состоит в нахождении \bar{Q} .

Основная часть $Q_{ij} \sim A\delta_{ij} + B\Omega_i\Omega_j$, естественно, не дает вклада в (7.1) (поскольку $\Omega = \{0, \Omega_2, \Omega_3\}$). Простейшая добавка $\sim \Omega$ в первой степени имеет вид [362]

$$Q'_{ij} = \{\varepsilon_{iab}q_j + \varepsilon_{jab}q_i\} q_a\Omega_b. \quad (7.3)$$

Тензор ε_{iab} появляется, поскольку Ω — псевдовектор, а \bar{Q} — истинный тензор, \mathbf{q} — вектор избранного направления, в данном случае вертикального: $\mathbf{q} = \mathbf{e}_r$. Из (7.3) видно, что \mathbf{q} определяет именно избранное направление (или ось симметрии), а не физическую неоднородность: (7.3) не меняется при замене \mathbf{q} на $-\mathbf{q}$. Иначе говоря, вклад (7.3) появится при наличии анизотропной турбулентности, а \mathbf{q} может быть и единичным вектором.

Из (7.3) видно, что только $Q'_{13} \neq 0$, а $Q'_{12} = 0$. Это означает, что решение (7.1) суть $\Omega = \Omega(r)$, широтной зависимости нет. Поэтому в первых работах по этой проблеме, где тензор \bar{Q} фигурировал именно в таком виде (например, [282]), приходилось дополнительно привлекать меридиональную циркуляцию, естественно при этом возникающую и вызывающую уже широтное дифференциальное вращение. В дальнейшем была найдена добавка более высокого порядка по Ω , чем (7.3), $\sim \Omega^3$ (члены $\sim \Omega^2$ вклада в (7.1) не дают):

$$Q''_{ij} = D\{\varepsilon_{iab}\Omega_j + \varepsilon_{jab}\Omega_i\} q_a\Omega_b(\mathbf{q}\Omega) \quad (7.4)$$

(см. [362]). Здесь опять \mathbf{q} входит квадратично, т. е. \mathbf{q} характеризует анизотропию (а не неоднородность). Но на этот раз $Q''_{12} \neq 0$ (и $Q''_{13} \neq 0$). Следовательно, \bar{Q}'' (7.4) приведет как к широтному, так и к радиальному дифференциальному вращению, $\Omega = \Omega(r, \theta)$.

Природа анизотропии. Тензоры \bar{Q}' и \bar{Q}'' возникают в результате действия кориолисовой силы на исходную турбулентность (которая имела бы место, не будь вращения). Качественно в этом можно убедиться, вычисляя T_{ij} точно так же, как вычислялась гиротропность (4.22), (4.23): тогда получается \bar{Q}' . Более строго \bar{Q}' и \bar{Q}'' получают в диффузионном приближении (см. разд. 4.1). Таким образом изучается воздействие вращения на конвекцию

(точнее, на форму конвективной ячейки). Важно иметь в виду, что исходная турбулентность должна быть анизотропной.

В первых работах анизотропия просто задавалась, но в дальнейшем она естественно входила в расчеты, поскольку сама конвекция возникает из-за архимедовой силы, дающей избранное направление — вертикальное [239]. При этом, однако, используется приближение Буссинеска, т. е. полагается, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. В стратифицированной среде солнечной конвективной зоны, где плотности меняется на пять-шесть порядков, необходимо это приближение как-то улучшить. Например, пользоваться приближением неупругости $\operatorname{div} \rho \mathbf{u} = 0$, см. (1.52). Обоснование его имеется [256], но последовательный расчет \hat{Q} в этом приближении не проводился.

Вместо этого вернулись к первоначальному подходу — заданию анизотропии исходной турбулентности. Но только при наличии крутого градиента плотности анизотропия должна появиться «естественным образом» [364, 50, 97]. Надо, однако, сказать, что в отличие от вопроса о переносе магнитных полей (см. разд. 4.12) исследование переноса вихря (или углового момента) встречается со следующими затруднениями. Вычисление переноса поля проводится в x -представлении, и поэтому достаточно задать корреляции (4.85), (4.86) (т. е. в одной точке и в двух близких точках) исходной турбулентности, которая является квазиизотропной. При расчете динамики вихря необходимо переходить в фурье-представление (для исключения давления) и задавать полный спектральный тензор исходной турбулентности, а он неизвестен (понятие квазиизотропной турбулентности здесь не разработано).

Дифференциальное вращение и солнечный цикл. Несмотря на указанную трудность, теория предсказывает важнейшие черты дифференциального вращения Солнца и звезд [97]. Прежде всего, для Солнца она дает согласованный с наблюдательными данными широтный закон изменения Ω . Кроме того, теория предсказывает рост Ω с глубиной в соответствии со спектроскопическими данными движения пятен, гелиосейсмологии и солнечного динамо. Одной из черт последнего является миграция активности к экватору (см. разд. 7.3), и только при увеличении Ω с глубиной именно так и получается [407].

Одним из аргументов против наличия дифференциального вращения является факт долгого существования корональных дыр — областей пониженной плотности в открытых магнитных конфигурациях (см. разд. 7.9). Дифференциальное вращение должно было бы их быстро «растачить». В действительности же это явление можно интерпретировать иначе [38]: глобальные солнечные конфигурации возникают в несимметричном (относительно оси вращения) динамо — солнечном цикле. Поле открытой конфигурации уже не заморожено в плазму конвективной зоны (из-за наличия турбулентной диффузии) и может поэтому существовать в течение времени порядка периода солнечного цикла.

Куда исчезают тороидальные поля? Согласно (1.97), дифференциальное вращение генерирует тороидальное поле, т. е. B_ϕ -составляющую. Рост поля происходит линейно со временем. Возникают два вопроса:

- 1) до поля какой напряженности происходит рост?
- 2) что происходит в дальнейшем с тороидальным полем, или куда оно исчезает (а оно существует не вечно)?

Конечно, эти вопросы взаимосвязаны. На первый взгляд кажется, что электромагнитные силы останавливают рост поля. Но это означает, что к концу процесса дифференциальное вращение должно существенно измениться, грубо говоря, прекратиться, что не наблюдается. Только сравнительно недавно обнаружены слабые осцилляции вращения, которые и приписываются его реакции на магнитные силы [271]. Кроме того, магнитная энергия составляет всего 1% от энергии дифференциального вращения [376].

Поэтому остановка роста поля и его дальнейшее исчезновение связаны только с диссипативным процессом. Естественно ожидать, что последний обязан турбулентной диффузии с коэффициентом D_T . Установившееся поле можно оценить, пользуясь (4.81) (и пренебрегая α -эффектом):

$$\langle B_\phi \rangle \approx \frac{L^2 \Omega}{D_T} \{ \langle B_r \rangle, \langle B_\theta \rangle \}. \quad (7.5)$$

Если принять D_T согласно (4.12), то получим $L^2 \Omega / D_T \approx 80$. Таким образом, напряженность тороидального поля всего лишь в 80 раз больше полоидального. А должно быть в несколько тысяч раз! Заметим, что именно поэтому в численном счете солнечного динамо, где принимается большой коэффициент турбулентной диффузии, и получаются аномально низкие значения тороидального поля. Например, в [257] тороидальное поле в три раза больше полоидального.

На самом же деле турбулентная диффузия полностью выключается из-за обратной реакции магнитного поля! Для того чтобы убедиться в этом, определим предельное поле, не влияющее на движение (4.88): $u \sqrt{4\pi \rho} \text{Re}_m^{-1/2}$. Прежде всего, $\text{Re}_m^{-1/2} \sim \sigma^{-1/2} \sim (T^{3/2})^{-1/2} = T^{-3/4}$. Далее, T меняется с глубиной почти по адиабатическому закону: $T \sim \rho^{3/2}$, так что $\text{Re}_m^{-1/2} \sim \rho^{-1/2}$. Учитывая множитель $\sqrt{4\pi \rho} \sim \rho^{1/2}$ (а также то, что u и l практически не меняются с глубиной, $u = 10^4$ см/с, $l = 3 \cdot 10^9$), получим, что граничное поле не зависит от глубины:

$$B = u \sqrt{4\pi \rho} \text{Re}_m^{-1/2} \approx 10^{-2} \text{ Гс}. \quad (7.6)$$

Согласно (4.91) $D_T = D_T^{(0)} (B/\langle B \rangle)^4 = D_T^{(0)} \cdot 10^{-20}$, мы приняли $\langle B \rangle = 10^3$ Гс. Конечно, такое значение D_T выходит за пределы применимости (4.91), поскольку оказывается $D_T > \eta$. Это озна-

чает, что турбулентная диффузия просто отсутствует и в (4.81) надо принимать $D_T = \eta$.

Итак, тороидальные поля на Солнце хотя и не подавляют конвекцию полностью, но предотвращают уменьшение масштаба поля до таких величин, когда включится омическая диссипация (и сформируются многочисленные ТС). Поэтому турбулентная диффузия отсутствует. С другой стороны, тороидальные поля топологически неравновесны и сами по себе создают ТС, в которых и происходит их диссипация (см. разд. 5.3). В конвективной зоне поле характеризуется свойством (5.5), оно переносится к экватору и полюсам с помощью меридиональной циркуляции, возникающей из-за отсутствия магнитного равновесия. Циркуляция состоит из двух ячеек в каждом полушарии, что и наблюдается [271].

Диссипация поля в конвективной зоне оказывается, однако, слишком медленной. Время (6.10) велико из-за высокой проводимости σ . Поэтому тороидальное поле успевает спуститься под конвективную зону (см. разд. 5.3). Здесь, правда, проводимость еще больше ($\delta \sim \rho$, как и выше), но зато имеются другие факторы, действующие в сторону ускорения. Действительно, $B_\phi \sim \rho$ (см., например, (1.120), (1.121)), поэтому $c_A \sim \rho^{1/2}$. С другой стороны, из-за сохранения массы вещества в трубке $L \sim 1/\rho$. Напомним, что тороидальное поле вытягивается в цилиндр радиуса L (параллельный оси вращения). Поэтому $L_m^{1/2} \sim \rho^{1/4}$ и $t_{PS} \sim \rho^{-1/4}$ (см. 6.10)). Итак, при погружении поля внутрь его плотность растет, а время жизни падает. Но, главное, ввиду резкого уменьшения поперечного сечения L при погружении под конвективной зоной возможно сосуществование большого числа «цилиндров» — вытянутых тороидальных полей, возникших за много полуциклов. В каждом из них происходит диссипация, и поэтому в целом она оказывается весьма эффективной.

Как мы видели выше, тороидальное поле не подвергается турбулентной диффузии, поэтому (4.81) необходимо модифицировать. Сделаем это феноменологически, поскольку, кроме погружения, имеется конкурирующий процесс — плавучесть [132]. Здесь уместно отметить, что последняя вызывает настолько быстрый подъем трубки (даже при учете турбулентной вязкости), что она должна была бы за короткое время покинуть глубинные слои конвективной зоны, где, как считается, и происходит генерация полоидальной составляющей. Но тогда станет невозможным действие солнечного цикла.

В последнее время выяснилось, что плавучесть в большей степени ослабляется или даже отсутствует. Дело в том, что поле подавляет конвективный перенос, в результате чего происходит охлаждение и поэтому конденсация плазмы над полем. Иными словами, выше силовой трубки находится тяжелая «подушка», не дающая трубке подняться [340, 341]. Время от времени происходит прорывание перегретой (снизу) плазмы с частью магнитного потока вверх, что проявляется в виде активности (пятна, поры и т. д.). Большая часть магнитного потока возвращается

назад вглубь, а меньшая остается в фотосфере довольно долгое время. В целом тороидальное поле будет довольно долго (примерно четверть цикла) находится в конвективной зоне, а потом все-таки начнет погружаться. Поэтому заменим диффузионный член в (4.81) на $\langle B_\varphi \rangle / t_T$:

$$\partial_t \langle B_\varphi \rangle = r \sin \theta \langle B_r \rangle \partial_r \Omega + \langle B_\theta \rangle \sin \theta \partial_\theta \Omega - \langle B_\varphi \rangle / t_T, \quad (7.7)$$

$$t_T = \gamma \langle B_\varphi \rangle^2,$$

где t_T — характерное время исчезновения поля $\langle B_\varphi \rangle$ из конвективной зоны оставим пока в виде неизвестного параметра (в (7.7) мы пренебрегли также α -эффектом).

Солнечный цикл. В основу солнечного динамо берутся уравнения (4.81). Будем пользоваться вместо (4.81) уравнением (7.7). Для качественного анализа заменим их «декартовыми» ($\langle A_\varphi \rangle \equiv \equiv A_x$, $\langle B_\varphi \rangle \equiv B_x$, $\langle B_r \rangle \equiv B_z$, $\partial_x = 0$):

$$\partial_t A_x = B_x + D_T \Delta A_x, \quad \partial_t B_x = B_z r \partial_z \Omega - B_x / t_T. \quad (7.8)$$

Здесь мы дополнительно пренебрегли широтной зависимостью Ω , поскольку в (7.7) $r \partial_r \Omega \gg \partial_\theta \Omega$. Полагая, что α , D_T , $r \partial_z \Omega$ и t_T — константы, получим решение

$$A_x, B_x \sim \exp [\omega t + i (y k_y + z k_z)], \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{1}{2} (k^2 D_T + t_T^{-1}) + \left[\frac{1}{4} (k^2 D_T - t_T^{-1})^2 - i k_y \alpha r \partial_z \Omega \right]^{1/2} = \\ &= -\frac{1}{2} (k^2 D_T + t_T^{-1}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{4} (k^2 D_T - t_T^{-1})^2 + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1}{4^2} (k^2 D_T - t_T^{-1})^4 + (k_y \alpha r \partial_z \Omega)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ -\frac{1}{4} (k^2 D_T - \right. \\ &- t_T^{-1})^2 + \left. \left[\frac{1}{4^2} (k^2 D_T - t_T^{-1})^4 + (k_y \alpha r \partial_z \Omega)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \operatorname{sgn} (k_y \alpha \partial_z \Omega). \end{aligned}$$

Возбуждение ($\operatorname{Re} \omega \geq 0$) наступит согласно (7.9) при

$$|k_y \alpha r \partial_z \Omega| \geq (k^2 D_T + t_T^{-1}) (k^2 D_T / t_T)^{1/2}. \quad (7.10)$$

При $1/t_T = k^2 D_T$ из (7.10) следует

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|k_y \alpha r \partial_z \Omega|)^{1/2} \geq k^2 D_T \quad (7.11)$$

(ср. с (4.83), $\delta \Omega = r \partial_z \Omega$, $k \approx 1/L$).

Для очень слабых (затравочных) полей α и D_T берутся по оценке (4.81) и критерий (7.10) выполняется ($1/t_T$, во всяком случае, меньше, чем $k^2 D_T$). Поскольку имеется и мнимая часть ω , амплитуда осцилляций экспоненциально растет. Так продолжается до тех пор, пока нелинейные эффекты не начнут подавлять генерацию и условие (7.10) не превратится в равенство. В этом случае остается одна мнимая часть, т. е. только осцилляции:

$$\omega = -i (k^2 D_T / t_T)^{1/2} \operatorname{sgn} (k_y \alpha \partial_z \Omega), \quad (7.12)$$

которые и отождествляются с солнечным циклом. Кроме простых осцилляций, согласно (7.9), (7.12) происходит также смещение активности к экватору с учетом знака α по (4.23) и (4.81) и если $\partial_z \Omega < 0$, т. е. скорость Ω растет с глубиной (см. разд. 7.2). Это явление — динамо-волны по терминологии Паркера [329] — отражает закон Шперера. Таким образом, теория объясняет следующие явления (см. [375]):

а) правило полярности Хэйла: выход поля в виде биполярных групп, причем направление линии, соединяющей два пятна, коррелирует с направлением тороидального поля;

б) закон Шперера («диаграмма бабочек»);

в) обращение знака околополярных полей (с периодом $2\pi/\omega$ согласно (7.12));

г) фазовые соотношения между полоидальной и тороидальной составляющими (следуют из (7.8) при учете (7.12)). Согласие с теорией дифференциального вращения, по которой Ω растет с глубиной (см. разд. 7.2);

д) дипольный характер полоидального поля;

е) жесткое вращение магнитной секторной структуры и корональных дыр (см. разд. 7.2);

ж) зональные осцилляции, объясняющие действие магнитных сил на движение.

Нелинейное динамо. Главным нелинейным эффектом мы уже воспользовались: выходом системы на чисто осцилляционный режим (7.12), $\text{Re } \omega = 0$. Здесь уместно заметить, что если бы $1/t_T = k^2 D_T$, т. е. тороидальное поле подвергалось бы турбулентной диффузии, как обычно считается, то такой режим никогда не мог бы установиться. Действительно, для слабого поля выполнялось бы неравенство (7.11). При $\langle B \rangle > \bar{B}$ (7.6) $\alpha \sim \langle B \rangle^{-6}$, т. е. левая часть (7.11) $\sim \langle B \rangle^{-3}$, а $D_T \sim \langle B \rangle^{-4}$ (см. (4.91)). То есть неравенство (7.11) не могло бы перейти в равенство. Иное дело (7.10): справа стоит $1/t_T \sim \langle B_p \rangle^2$ (см. (7.7), остальные величины в (7.10) зависят от полоидального поля $\langle B_p \rangle$).

Поскольку t_T — свободный параметр, определим его так, чтобы из (7.12) следовал наблюдаемый период солнечного цикла $T = 22$ годам, и подставим (7.12) в (7.10) (в виде равенства). Как говорилось выше, если в (7.10) подставить $D_T = D_T^{(0)}$ и $\alpha = \alpha_0$ (4.91), то левая часть будет превышать правую на два порядка. Ввиду очень сильной зависимости D_T и α от $\langle B_p \rangle$ ($D_T \sim \langle B_p \rangle^{-4}$, $\alpha \sim \langle B_p \rangle^{-6}$) уже очень небольшое изменение $\langle B_p \rangle$ превратит неравенство (7.10) в равенство, а именно при

$$\langle B_p \rangle = 2,2 \bar{B}. \quad (7.13)$$

Сравнивая с (7.6), видим, что получаемое поле слишком слабое. Наблюдаемое поле на два порядка больше.

В сущности, это связано с тем, что реальное поле $\langle B_p \rangle \sim 1$ Гс оказывается слишком сильным. В самом деле, согласно (4.91) и с учетом (7.6) D_T уменьшается на восемь порядков, а α — на

двенадцать по сравнению с невозмущенными значениями! Возбуждение практически отсутствует.

Возможные пути преодоления создавшихся трудностей. Фиаско в объяснении солнечного цикла связано с тем, что турбулентность неизбежно генерирует мелкомасштабную составляющую поля при наличии крупномасштабной. Без этого нет диссипации, а значит, и турбулентной диффузии. Экспоненциальный рост мелкомасштабной составляющей прекращается при достижении равнораспределения магнитной и кинетической энергий. После этого блокируется турбулентная диффузия и генерация крупномасштабного поля, что и положено в основу формул (4.91) (впервые указано еще Пиддингтоном [137]).

Поскольку действие турбулентности выключается при низких напряженностях поля, фактически при слабом нарушении (4.88) (см. (7.13)), то появляется желание объяснить солнечное поле как реликтовое. Но наблюдаемое поле переменное (солнечный цикл!). Трудно вообразить также диссипацию поля в верхних слоях атмосферы вместо турбулентной в конвективной зоне (так называемое двухуровневое динамо). Ведь отщепление петель будущего полоидального поля от тороидального неизбежно должно происходить в конвективной зоне (см. разд. 3.5). А снижение коэффициента D_T на восемь порядков приведет к тому, что это отщепление будет происходить миллион лет!

Отметим, что в численном счете число Re_m обычно считается не очень большим (см., например, [257]). Принимается «перенормированное», т. е. фактически турбулентное, значение $\eta = D_T$, поэтому для крупных ячеек и дифференциального вращения Re_m получается не очень большим ($\sim 10-10^2$). Турбулентность здесь только снижает проводимость. На самом же деле в высокопроводящей среде турбулентность проявляется более «коварно». При неслабой напряженности поля она сама по себе не подавляется, но зато и не способна снизить проводимость.

Можно предложить следующие трактовки.

1. Ограничение (4.88) связано с выходом мелкомасштабной составляющей на уровень равнораспределения магнитной и кинетической энергий. В действительности существуют механизмы, доводящие энергию поля до уровня выше уровня равнораспределения (вплоть до равнораспределения магнитной и тепловой энергий). Такие поля наблюдаются на фотосфере (см. разд. 7.6) в виде сверхтонкой структуры, или фибрил. При их учете поднимается уровень минимального поля (4.88) и снижается эффективное число Re_m (так называемое фибрильное динамо, см. разд. 7.6). Кроме того, дифференциальное вращение будет способствовать отщеплению — отрыву петель в виде фибрил от тороидального поля.

2. Часть динамо — вытягивание тороидального поля и закручивание петель (см. рис. 3.2, а—в) по-прежнему здесь «работает», пока нет диссипации. В дальнейшем начнется пересоединение, выражающееся в отщеплении петель. Этот процесс очень медлен-

ный (при неслабых полях), поэтому за реальное время пересоединится очень малая часть магнитного потока. Но так же как с конфигурацией рис. 6.1, здесь может произойти потеря равновесия. Этому способствует слияние петель (см. рис. 3.2, *в*), возникшее в результате топологического неравновесия магнитных островов (см. разд. 5.11). После этого процесс будет уже не кинематическим, а спонтанным. Иначе говоря, он будет происходить сам по себе, вне зависимости от турбулентности. И дальнейшее отщепление петель, и их слияние будут происходить за времена t_{ps} (6.10), не связанные с турбулентными процессами.

3. Напомним, что напряженность мелкомасштабных полей растет до уровня равномерного распределения (см. разд. 4.11), в то время как крупномасштабные ограничены гораздо более слабым предельным полем (4.88). При усреднении мелкомасштабных полей по размерам, большим, чем характерный размер пульсаций l , всегда имеется ненулевая флуктуация. Дипольную составляющую мелкомасштабных полей можно трактовать как крупномасштабное, или глобальное, поле. Кроме того, магнитные неоднородности имеют тенденцию к слиянию, создавая реальное крупномасштабное поле (см. разд. 6.8). Это случайный процесс, и дипольная составляющая будет меняться случайным образом. Предположим, что время корреляции процесса совпадает с периодом солнечного цикла. При этом дипольный момент, вообще говоря, не параллелен оси вращения (как в «классическом» солнечном цикле). Именно это наблюдается [177, 101] и трактуется как отклонение средних полей от осевой симметрии. Дифференциальное вращение приведет к диссипации неосесимметричных составляющих (см. формулу (3.6), разд. 3.1), а из осесимметричной будет вытягивать тороидальное поле. Последнее, конечно, осесимметрично и параллельно экваториальной плоскости. Поэтому активность обладает чертами осевой симметрии (например, правило Хэйла).

Надо однако, признать, что в настоящее время мы могли бы объяснить солнечные магнитные поля, если бы напряженность их была на два порядка меньше наблюдаемой. Указанные трактовки — всего лишь предположения.

7.4. Галактики, звезды и все такое

Общие ограничения для динамо. Генерация поля α^2 -динамо происходит при выполнении критерия (4.82) в разд. 4.12. Генерация прекращается, когда неравенство (4.82) превращается в равенство. Пользуясь (4.91), получим

$$L\alpha_0 (\bar{B}/\langle B \rangle)^6 = D_T^{(0)} (\bar{B}/\langle B \rangle)^4, \quad (7.14)$$

$$\bar{B} = u \sqrt{4\pi\rho} \operatorname{Re}_m^{-1/2}, \quad \langle B \rangle = \bar{B} (L\alpha_0/D_T^{(0)})^{1/2}.$$

По порядку величины напряженность $\langle B \rangle$ близка к \bar{B} : если даже α_0 равно своему максимальному значению u , то множитель при \bar{B} равен $(L/l)^{1/2}$ — величине, не большей десяти.

двенадцать по сравнению с невозмущенными значениями! Возбуждение практически отсутствует.

Возможные пути преодоления создавшихся трудностей. Фiasco в объяснении солнечного цикла связано с тем, что турбулентность неизбежно генерирует мелкомасштабную составляющую поля при наличии крупномасштабной. Без этого нет диссипации, а значит, и турбулентной диффузии. Экспоненциальный рост мелкомасштабной составляющей прекращается при достижении равнораспределения магнитной и кинетической энергий. После этого блокируется турбулентная диффузия и генерация крупномасштабного поля, что и положено в основу формул (4.91) (впервые указано еще Пиддингтоном [137]).

Поскольку действие турбулентности выключается при низких напряженностях поля, фактически при слабом нарушении (4.88) (см. (7.13)), то появляется желание объяснить солнечное поле как реликтовое. Но наблюдаемое поле переменное (солнечный цикл!). Трудно вообразить также диссипацию поля в верхних слоях атмосферы вместо турбулентной в конвективной зоне (так называемое двухуровневое динамо). Ведь отщепление петель будущего полоидального поля от тороидального неизбежно должно происходить в конвективной зоне (см. разд. 3.5). А снижение коэффициента D_T на восемь порядков приведет к тому, что это отщепление будет происходить миллион лет!

Отметим, что в численном счете число Re_m обычно считается не очень большим (см., например, [257]). Принимается «перенормированное», т. е. фактически турбулентное, значение $\eta = D_T$, поэтому для крупных ячеек и дифференциального вращения Re_m получается не очень большим ($\sim 10-10^2$). Турбулентность здесь только снижает проводимость. На самом же деле в высокопроводящей среде турбулентность проявляется более «коварно». При неслабой напряженности поля она сама по себе не подавляется, но зато и не способна снизить проводимость.

Можно предложить следующие трактовки.

1. Ограничение (4.88) связано с выходом мелкомасштабной составляющей на уровень равнораспределения магнитной и кинетической энергий. В действительности существуют механизмы, доводящие энергию поля до уровня выше уровня равнораспределения (вплоть до равнораспределения магнитной и тепловой энергий). Такие поля наблюдаются на фотосфере (см. разд. 7.6) в виде сверхтонкой структуры, или фибрил. При их учете поднимается уровень минимального поля (4.88) и снижается эффективное число Re_m (так называемое фибрильное динамо, см. разд. 7.6). Кроме того, дифференциальное вращение будет способствовать отщеплению — отрыву петель в виде фибрил от тороидального поля.

2. Часть динамо — вытягивание тороидального поля и закручивание петель (см. рис. 3.2, *a—e*) по-прежнему здесь «работает», пока нет диссипации. В дальнейшем начнется пересоединение, выражающееся в отщеплении петель. Этот процесс очень медлен-

ный (при неслабых полях), поэтому за реальное время пересоединится очень малая часть магнитного потока. Но так же как с конфигурацией рис. 6.1, здесь может произойти потеря равновесия. Этому способствует слияние петель (см. рис. 3.2, *в*), возникшее в результате топологического неравновесия магнитных островов (см. разд. 5.11). После этого процесс будет уже не кинематическим, а спонтанным. Иначе говоря, он будет происходить сам по себе, вне зависимости от турбулентности. И дальнейшее отщепление петель, и их слияние будут происходить за времена t_{PS} (6.10), не связанные с турбулентными процессами.

3. Напомним, что напряженность мелкомасштабных полей растет до уровня равномерного распределения (см. разд. 4.11), в то время как крупномасштабные ограничены гораздо более слабым предельным полем (4.88). При усреднении мелкомасштабных полей по размерам, большем, чем характерный размер пульсаций l , всегда имеется ненулевая флуктуация. Дипольную составляющую мелкомасштабных полей можно трактовать как крупномасштабное, или глобальное, поле. Кроме того, магнитные неоднородности имеют тенденцию к слиянию, создавая реальное крупномасштабное поле (см. разд. 6.8). Это случайный процесс, и дипольная составляющая будет меняться случайным образом. Предположим, что время корреляции процесса совпадает с периодом солнечного цикла. При этом дипольный момент, вообще говоря, не параллелен оси вращения (как в «классическом» солнечном цикле). Именно это наблюдается [177, 101] и трактуется как отклонение средних полей от осевой симметрии. Дифференциальное вращение приведет к диссипации неосесимметричных составляющих (см. формулу (3.6), разд. 3.1), а из осесимметричной будет вытягивать тороидальное поле. Последнее, конечно, осесимметрично и параллельно экваториальной плоскости. Поэтому активность обладает чертами осевой симметрии (например, правило Хэйла).

Надо однако, признать, что в настоящее время мы могли бы объяснить солнечные магнитные поля, если бы напряженность их была на два порядка меньше наблюдаемой. Указанные трактовки — всего лишь предположения.

7.4. Галактики, звезды и все такое

Общие ограничения для динамо. Генерация поля α^2 -динамо происходит при выполнении критерия (4.82) в разд. 4.12. Генерация прекращается, когда неравенство (4.82) превращается в равенство. Пользуясь (4.91), получим

$$L\alpha_0 (\bar{B}/\langle B \rangle)^6 = D_T^{(0)} (\bar{B}/\langle B \rangle)^4, \quad (7.14)$$

$$\bar{B} = u \sqrt{4\pi \text{Re}_m^{-1/2}}, \quad \langle B \rangle = \bar{B} (L\alpha_0/D_T^{(0)})^{1/2}.$$

По порядку величины напряженность $\langle B \rangle$ близка к \bar{B} : если даже α_0 равно своему максимальному значению u , то множитель при \bar{B} равен $(L/l)^{1/2}$ — величине, не большей десяти.

Аналогично для α — Ω -динамо можно записать «эмпирическую» формулу

$$\langle B \rangle = aB, \quad 1 < a < 10 \quad (7.15)$$

(ср. с (7.3)). Дело в том, что при нарушении критерия (4.88), т. е. при $\langle B \rangle > B$, генерация практически сразу выключается: $\alpha \sim (B/\langle B \rangle)^6$, см. (4.91).

Галактика. Наблюдаемое поле межзвездной среды Галактики $B \approx u\sqrt{4\pi\rho} = 10^{-6}$ Гс, так что энергия его близка к кинетической энергии облаков. Теория, однако, предсказывает крупномасштабное поле (7.14) или (7.15), что в $Re_m^{1/2}$ раз меньше, т. е. на семь порядков меньше наблюдаемого! Как же объяснить поле Галактики?

Осцилляциями магнитных монополей его не объяснишь [343]. Прежде всего, наблюдаемое поле выключает не только генерационные свойства турбулентности, но и диффузионные. Иными словами, реликтовое поле Галактики практически не диссипирует (за космологические времена).

Кроме того, возможно, галактическое поле — мелкомасштабное, а для него условие $B \approx u\sqrt{4\pi\rho}$ выполняется (см. разд. 4.11). Крупномасштабная составляющая может выделяться при слиянии магнитных неоднородностей и при содействии дифференциального вращения Галактики, как в разд. 7.3, п. 2, 3. Выход, указанный в разд. 7.3, п. 1, здесь не годится, так как тепловая энергия газа Галактики порядка кинетической и образование сверхтонкой структуры маловероятно. Что касается спектра мелкомасштабного поля, то он содержит две «популяции» и изображен на рис. 4.2, разд. 4.11.

Звезды. Конечно, и для них предсказываемая напряженность крупномасштабного поля (7.14), (7.15) слишком малая. Поэтому приходится вернуться к старой идее, что поле звезды образовалось при сжатии замагниченного межзвездного вещества. Правда, поле при этом получается непомерно большим. Вероятно, сжатие происходит в основном вдоль силовых линий, тогда поле слабо усиливается. Другая возможность — это батарейные эффекты, усиленные полудинамо [236].

Скорее всего звездные магнитные поля по своей природе мелкомасштабные. Тогда все трудности снимаются. К тому же они могут объединяться в глобальные, как на Солнце и в Галактике.

Аккреция на черную дыру. Генерация поля α -эффектом в падающем на дыру газе рассматривалась в работах [116, 220]. Магнитное поле «нужно» для объяснения излучения плазмы — единственного способа обнаружения черной дыры. Гравитационная энергия падающего газа превращается в тепловую и излучается. Но имеется препятствие для падения: начальный угловой момент. Последний должен каким-то образом выноситься на периферию. Механизмы переноса, аналогичные действующим в солнечной конвективной зоне (см. разд. 7.2), здесь не обсуждались. Был

предложен механизм выноса момента из-за наличия магнитных неоднородностей — фактически турбулентной вязкости [225].

Имеется еще одно препятствие для падения газа: само магнитное поле. В окружающем межзвездном газе или на соседней звезде, с которой и происходит аккреция, всегда имеется слабое крупномасштабное поле. При падении и вращении в диске поле усиливается. В конце концов оно может блокировать весь процесс аккреции. Диссипация поля может обеспечить ТС в экваториальной области черной дыры [180]. Наличие ТС объясняет также вспыхивающий (импульсный) характер наблюдаемого излучения [395].

7.5. Природа солнечных фотосферных магнитных полей

Только эти поля наблюдаются прямыми методами — по зеемановскому расщеплению с помощью магнитографов. Поля в конвективной зоне определяются с помощью теоретических соображений и их проявлений на фотосферном уровне (выход тороидального поля в виде пятен). В более высоких слоях атмосферы измерения чрезвычайно трудны и напряженности магнитных полей выясняются косвенными методами. Фотосферные поля можно классифицировать по масштабам:

- 1) глобальные поля (размер $l_T = 10^{11}$ см);
- 2) гигантские поля и структуры ($l_g = 3 \cdot 10^{10} - 10^{11}$ см);
- 3) поля супергранул и пятна ($l_{sg} = l_s = 3 \cdot 10^9$ см);
- 4) мелкомасштабные поля (поля гранул $l_{gr} = 3 \cdot 10^7$ см и более мелкие);
- 5) сверхтонкая структура ($l_f < 10^7$ см).

Глобальные поля. Они описываются наиболее низкими модами сферических гармоник. Горизонтальный размер глобальных полей сильно превышает вертикальный (последний не больше глубины конвективной зоны), поэтому они представляют собой типичный пример полей промежуточного масштаба (см. разд. 4.14). Тем не менее для их описания обычно используют уравнения динамики крупномасштабных полей (4.81): они проще. С их помощью получают солнечный цикл — основное проявление солнечной активности.

При использовании более точного уравнения (4.87) (т. е. при учете слабой неоднородности и слабой нелинейности) появятся различного рода переносы. Однако конкретно для Солнца переход к более точному уравнению представляет собой «косметическую» меру. Действительно, как говорилось в разд. 7.3, напряженность поля (~ 1 Гс) оказывается немалой. Поле сопротивляется турбулентному запутыванию, диссипации, а значит, и генерации. Таким образом, приходится признать, что природа глобального поля нами не понята.

В указанном выше подходе поле считается крупномасштабным, т. е. оно взаимодействует с ячейками, размер которых значительно меньше масштаба поля (фактически с супергранулами). В дру-

гом подходе глобальное поле взаимодействует с гигантскими ячейками (структурами). Такие же два подхода имеются в проблеме дифференциального вращения (см. разд. 7.2). Поскольку таких ячеек несколько, здесь уже целесообразно пользоваться теорией турбулентности. Поэтому расчеты такого рода — численные (см., например, [257]). При этом, однако, считается, что число Re_m невелико ($\sim 10-20$), т. е. суперпозиция приводит к турбулентной диффузии поля, снижая эффективное число Re_m . На самом же деле, как сказано в разд. 7.3, нелинейность включает турбулентную диффузию, так что и этот второй подход натывается на те же (до сих пор непреодолимые) трудности. Что касается выходов из трудностей, предложенных в разд. 7.3, то ввиду их крайне предварительного характера сравнение с наблюдениями преждевременно. Впрочем, в разд. 7.6 мы вернемся к солнечному циклу в связи со сверхтонкой структурой.

Гигантские структуры. Они наблюдаются в виде униполярных областей магнитного поля. Над некоторыми обнаруживаются корональные дыры. Время жизни — до нескольких лет. Имеются три объяснения гигантских структур: 1) естественно считать, что эти поля генерируются как более высокие (несимметричные) гармоника солнечного цикла (см. конец разд. 7.2); 2) они генерируются гигантскими ячейками, открытыми недавно [373]; 3) они являются результатом диффузии, расплывания активных областей, точнее, пятен. Действительно, простой распад пятен и их диффузионное расплывание даст поле, в $(l_T/l_s)^2$ раз меньшее, чем поле пятна. Учитывая, что напряженность поля в пятне порядка нескольких килогаусс, получим напряженность поля гигантской структуры $B_g \approx 1 \div 6$ Гс. Надо, однако, признать, что более аккуратный количественный анализ диффузии не дает соответствия с наблюдениями.

Считается, в частности, что поле на полюсах является остатком «хвостовых» пятен. Таким образом может воссоздаться полоидальное поле: из-за миграции полей пятен к полюсам. Вспомним, что сами пятна соответствуют тороидальному полю. Поэтому миграция осуществляет обратную связь между полоидальным и тороидальным полями, в результате чего и может работать солнечный цикл (см. разд. 3.5). Именно так и строились эмпирические модели цикла (например, Лейтоном). Впрочем, физика модели Лейтона не отличается от α -эффекта (см. разд. 3.5, 4.12) и сталкивается поэтому с теми же трудностями. В частности, вопрос об отщеплении будущего полоидального поля от основного тороидального представляется столь же (пока непреодолимо) трудным, как и в теории α -эффекта (см. разд. 7.3).

Супергранулы и гранулы. В масштабах порядка $3 \cdot 10^9$ см и меньше движения и поля можно классифицировать как турбулентные, а сами поля как мелкомасштабные. Согласно результатам разд. 4.11 имеются два вида спектров (см. рис. 4.2). В наблюдаемых масштабах (не слишком малых и доступных разрешающей способности современных инструментов не менее $2 \cdot 10^7$ см) энергия

пульсаций спектра II мала, хотя эти пульсации дают вклад в пере-
межаемость. Поэтому в не слишком малых масштабах наблюдается
спектр I, только модифицированный в виде, изображенном на
рис. 7.1. Плотность кинетической энергии супергранул меньше
плотности гранул, поэтому и магнитная энергия в масштабах l_{sg}
меньше энергии в масштабах l_{gr} . Напомним, что в спектре типа F
выполняется равномерное распределение магнитной и кинетической энер-
гий. Характерная напряженность поля супергранул $B_{sg} = 10$ Гс
(поскольку скорость порядка 10^4 см/с), а гранул $B_{gr} = 300$ Гс
(скорость $\sim 10^5$ см/с). Наблю-
даемые данные качественно
соответствуют этому виду
спектра.

Эти результаты подтвержда-
ют выводы о наличии мелкомас-
штабного динамо (см. разд. 4.10,
4.11). Действительно, при отсут-
ствии генерации поле супергран-
нул и гранул было бы неким
возмущением крупномасштабно-
го поля, а его напряженность

порядка напряженности последнего, в то время как энергия мел-
комасштабного поля на два-четыре порядка больше энергии круп-
номасштабного. Связь мелкомасштабного поля с полями сверх-
тонкой структуры мы обсудим в разд. 7.6.

Пятна и активные области. Ввиду большой напряженности
поля (несколько килогаусс) и немалой занимаемой площади сол-
нечные пятна играют фундаментальную роль в активности. Пятна
являются объектом пристального и всестороннего изучения в те-
чение нескольких десятилетий, и мы не можем осветить здесь все
аспекты (за подробностями отсылаем читателя к монографии [141]).
Для нас важным является то, что пятно служит основанием маг-
нитной петли, часть которой поднимается высоко в корону (см.
рис. 5.13).

Пятна редко выходят в одиночку (в виде униполярных пятен),
скорее, парами (биполярная группа) и в виде групп пятен, фор-
мируя активную область. Как говорилось, в гл. 5 и 6, именно
выход новых пятен и их перемещение приводят в конце концов
к формированию ТС и поэтому к основной активности фотосферы
и короны. Сама активная область обладает крупномасштабной
структурой. Ряд авторов полагают, что в этом проявляется си-
нергетика, т. е. большие структуры формируются из меньших [59].
Как говорилось в разд. 4.2, турбулентность приводит к возник-
новению структур, тем более что большие ячейки на Солнце при-
обретают квазидвумерный характер, во-первых, из-за действия
силы Кориолиса (см. критерий (4.10)), во-вторых, из-за того, что
горизонтальные размеры ячейки много больше вертикальных.
Магнитное поле тоже проявляет тенденцию к образованию боль-
ших структур (см. разд. 6.8).

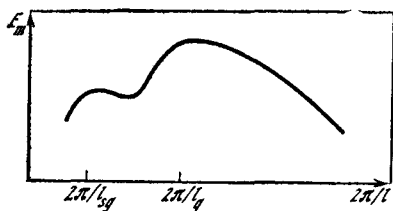


Рис. 7.1. Спектр мелкомасштабных магнитных полей

7.6. Сверхтонкая структура

После открытия сверхтонких структур (СТС) — мелких магнитных образований (фибрил) размером несколько десятков километров, обладающих сильным магнитным полем (порядка нескольких килогаусс) [387], солнечная физика стала претерпевать сильные изменения. Достаточно сказать, что практически все представления, связанные с магнитными полями, были подвергнуты сомнению и переосмыслению. Стало ясно, что теория динамо не в состоянии объяснить возникновение фибрил ввиду того, что она предсказывает поля, не превышающие уровень равномерного распределения ($\sim 100-300$ Гс). Перечислим все возникшие вопросы:

- 1) проблема возникновения СТС;
- 2) СТС и крупномасштабные поля (гигантская и глобальная структуры);
- 3) СТС и мелкомасштабные поля;
- 4) гидростатика фибрил.

Ряд авторов полагают, что все фотосферные поля сосредоточены в СТС. Это, однако, неточно. Часть магнитного потока существует в виде слабого квазигомогенного поля (см., например, [261]). Тем не менее ниже мы сосредоточим свое внимание на СТС.

Заметим, что данные о СТС получают с помощью косвенных методов: разрешающая способность современных инструментов недостаточна. Поэтому можно предложить измерять эксцесс

$$\Delta = \langle B_z^4 \rangle / \langle B_z^2 \rangle^2 - 3 \quad (7.16)$$

(ср. с (4.16), (4.55)). Как говорилось в разд. 4.2, эксцесс характеризует перемежаемость или скважность поля. Если поле сосредоточено в трубках толщиной δ , расстояние между трубками L , то $\Delta \approx L^2/\delta^2$. Для определения Δ по (7.16) необходимы измерения корреляции в одной точке. Это позволяет надеяться на то, что низкая разрешающая способность не будет помехой, тем более что в настоящее время построены гистограммы — функции распределения полей [165].

Происхождение СТС. Плотность магнитной энергии в фибрилах на два порядка превышает плотность кинетической в фотосфере и сравнима с тепловой. Это наводит на мысль, что сильные поля генерируются не в фотосфере, а в конвективной зоне, где плотность кинетической энергии $\rho v^2/2$ велика. Такая гипотеза наталкивается на ряд трудностей. Во-первых, движения плазмы, и в частности работа динамо-механизма, генерируют не магнитные трубки (т. е. одномерные образования), а слои (двумерные образования), см. разд. 2.9, 3.1, 4.11. Во-вторых, подъем магнитных трубок из конвективной зоны в фотосферу сопровождается их сильным расширением: поскольку давление меняется на несколько порядков (см. разд. 5.12). Трудно поэтому понять, каким образом они будут выходить в фотосферу столь тонкими.

В настоящее время предлагаются два способа формирования СТС в фотосфере. Первый — наиболее разработанный — был

предложен Паркером и назван неустойчивостью сильного поля [333]. Первоначально квазиоднородное вертикальное поле поджимается к краям супергранул (поскольку здесь происходит сток вещества вниз) и поле усиливается. Конвективный перенос тепла прекращается и происходит охлаждение вещества. В результате вещество начинает падать вниз, что приводит к эвакуации вещества из трубки и ее дальнейшему сжатию. В первых расчетах было показано, что поле усиливается до значения 1500 Гс [333], более подробные (численные) расчеты дали значение 1800 Гс [385].

Приведенный способ можно назвать динамическим, второй — кинематическим. Но все же энергия поля поднимается выше энергии равномерного распределения $B_e^2/8\pi = \rho u^2/2$ (впервые в работе [401], обзор более новых работ дан в [141, 225]). Это возможно либо если движение гасится более эффективно нежели магнитное поле, либо если обратное действие поля на движение ослаблено. Первая возможность может реализоваться у краев конвективной ячейки, и поле может достичь уровня B_m :

$$B_m = (\tilde{v}/\eta)^{1/2} B_e \quad (7.17)$$

(см. обозначения в (1.49) и (4.88)). Неравенство $B_m > B_e$ будет выполняться, если вязкость \tilde{v} (гасящая скорость) больше η (гасящая поле). Для Солнца выполняется обратное: $\eta > \tilde{v}$ (так что результат (7.17) может представлять интерес для звезд), кроме того, (7.17) получено для ламинарного (нетурбулентного) режима: конвективные ячейки квазистационарны.

Обратимся ко второй возможности кинематического подхода ослабленной обратной реакции поля на движение. Простейший пример такого рода дается вытягиванием B_x -составляющей из однородной B_z сдвиговым движением в x -направлении (1.96) или аналогично вытягиванием тороидального поля из полоидального (1.97). Когда B_x станет много больше B_z , вектор электромагнитной силы \mathbf{F} направлен в основном не против движения, а поперек его: $\mathbf{F} = \nabla B_x^2/8\pi$. Эта составляющая направлена вдоль оси z и компенсируется давлением. Вдоль оси x (против движения) действует сила $F_x = B_z \partial_z B_x/4\pi \approx B_z B_x/4\pi l$, l — масштаб движения, причем $F_x/F_z = B_z/B_x \ll 1$. И все-таки в динамическом режиме B_x растет только до уровня B_e , как в сильной альвеновской волне. В турбулентной среде возможен кинематический режим [37, 50]. Пусть $u_x(z, t)$ — случайная функция, тогда движение и поле B_x описываются следующими уравнениями:

$$\partial_t u_x = F' + \frac{1}{4\pi\rho} B_z \partial_z B_x, \quad (7.18)$$

$$\partial_t B_x = B_z \partial_z u_x + \eta \Delta B_x; \quad (7.19)$$

здесь $F' \approx u_x^2/\rho l$ — внешняя и случайная сила, поддерживающая турбулентность (ее корреляционная длина l , корреляционное время $\tau = l/u$). Нетрудно показать, что установившееся среднеквадратичное поле оценивается как $|B_x| = \text{Re}_m^{1/2} B_z$ (ср. с (3.10)).

Более эффективным оказывается механизм гидродинамической тяги. Рассмотрим поле, сосредоточенное в трубках, параллельных оси z (рис. 7.2, а). Движение плазмы в x -направлении со скоростью $u_x(z)$ сопровождается обтеканием трубки. На трубку действует сила гидродинамического сопротивления, что приводит к увеличению трубки движением. Она начинает вытягиваться, как на рис. 7.2, б. Сила тяги, действующая на участок трубки, имеет вид $C(u_x - u_T)^2 S$, u_T — скорость трубки, S — лобовая площадь, $C \approx 1$, для движений с очень большими числами Re (1.51) (см. [112]). Для получения уравнения типа (7.18) необходимо определить силу, действующую на единицу объема, т. е. поделить

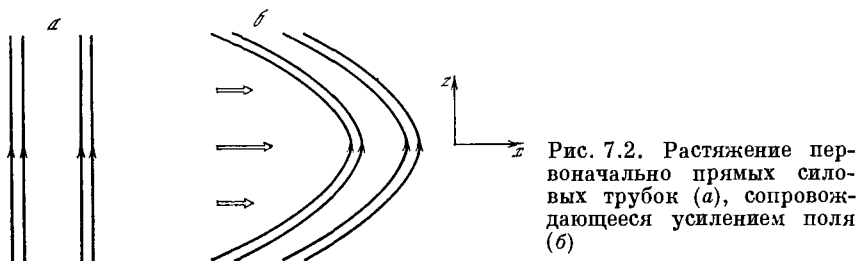


Рис. 7.2. Растяжение первоначально прямых силовых трубок (а), сопровождающееся усилением поля (б)

силу тяги \bar{T} на объем рассматриваемого участка трубки (который сохраняется в процессе вытягивания трубки):

$$\bar{\partial}_t u_T = \frac{u_x}{|u_x|} C (u_x - u_T)^2 \frac{\delta}{\delta_0^2} + \frac{1}{4\pi\rho} B_z \partial_z B_x, \quad (7.20)$$

$$\partial_t B_x = B_z \partial_z u_T, \quad (7.21)$$

где δ — радиус трубки, при $t = 0$ $\delta = \delta_0$, множитель $u_x / |u_x|$ добавлен для определенности знака скорости u_T . В (7.21) мы пренебрегли диссипацией. Само движение плазмы u_x можно считать заданным (напомним, что подход кинематический). Трубка же увлекается движением до тех пор, пока натяжение силовых линий (второй член справа в (7.20)) не окажет достаточного сопротивления, возникнет проскальзывание вещества относительно трубки и трубка в конце концов остановится ($u_T \rightarrow 0$). Это произойдет, когда два члена правой части (7.20) сравняются. Учитывая, что $\delta \sim (B_z/B_x)^{1/2} = (c_A^{(0)}/c_A)^{1/2}$, $c_A^{(0)} = B_z/\sqrt{4\pi\rho}$, $c_A = B_x/\sqrt{4\pi\rho}$, получим оценку

$$c_A = u_x [C (u_x/c_A^{(0)})^{3/2} l/\delta_0]^{2/3}. \quad (7.22)$$

Из этой формулы следует, что в противовес привычным представлениям, если даже начальное поле находится на уровне равномерного распределения, $c_A^{(0)} = u_x$, оно все еще увлекается гидродинамической тягой и усиливается в $(l/\delta_0)^{2/3}$ раз (это, впрочем, видно из непосредственной оценки правой части (7.20)). С другой стороны, как видно из (7.22), чем слабее начальное поле $c_A^{(0)}$, тем больше конечное c_A . Поэтому, казалось бы, принимая начальное поле

произвольно слабым, можно получить произвольно сильное конечное. Это, однако, не так. Во-первых, напряженность конечного поля ограничена давлением

$$B^2/8\pi \leq p, \quad c_A^2 \leq 2p/\rho. \quad (7.23)$$

При нарушении (7.23) внешнее давление не способно удержать поле и трубка развалится. Во-вторых, при малом начальном поле B_z конечная толщина трубки может получиться настолько малой, что включится омическая диффузия. Учитывая ее в (7.21) (добавлением члена $\eta \Delta B_x$, как в (7.19)), получим ограничение:

$$B_x \eta / \delta^2 < B_z u_T / l, \quad c_A < c_A^{(0)} (u_T \delta_0^0 / l \eta)^{1/2} \quad (7.24)$$

(ср. с (3.10)), мы учли, что $\delta^2 = \delta_0^2 B_z / B_x$.

Механизм усиления (7.20), (7.21) записан в плоской геометрии, но вытягивание дифференциальным вращением B_φ -компоненты из полоидального поля в виде тонких трубок происходит точно так же. Обратимся к усилению поля на фотосфере широтным дифференциальным вращением. Роль u_x здесь играет $u_\varphi \approx 10^5$ см/с. Рассмотрим два примера. В первом начальное поле $B_0 = 1$ Гс сосредоточено в трубках толщиной $\delta_0 = 2 \cdot 10^8$ см (на краю супергранул, например.) При длине трубки $l = 10^{10}$ см получим, что поле (7.22) примерно на порядок превышает возможное по (7.23), т. е. на самом деле определяется равномерным распределением магнитной и тепловой энергий (~ 1800 Гс). Во втором примере $B_0 = 10$ Гс, $\delta_0 = 5 \cdot 10^7$ см (несколько больше гранулы), $l = 10^{10}$ см и опять уровень (7.23) (на порядок) превзойден. Поэтому конечное поле $B_m = 1800$ Гс. В обоих примерах конечная толщина трубки $\delta = 4 \cdot 10^6$ см (40 км), критерий (7.24) выполняется с большим запасом.

Возвращаясь к модели (7.20), (7.21), отметим, что если $u_x(z, t)$ — случайная функция, $\langle u_x \rangle = 0$, то $\langle B_x \rangle = 0$, но величина $\langle B_x^2 \rangle$ растет тоже до значения (7.22). Это простейшая одномерная модель турбулентности. По всей вероятности, реальная трехмерная турбулентность тоже приводит к усилению поля в трубках до величины (7.22). Если это так, то гранулы усиливают начальное поле $B_0 = 20$ Гс в трубках толщиной 10^7 см до значения 1500 Гс. Конечная толщина трубки $\delta = 87$ км.

Крупномасштабные поля: фибрильное динамо. Мы видели, что движение способно усилить поле тонких трубок выше уровня B_e , $B_e^2/8\pi = \rho u^2/2$, и доводить его до довольно высоких значений (7.23) (в виде равенства). Это значительно поднимает пороговый критерий (4.88) для напряженности крупномасштабных полей, которые можно рассматривать в кинематическом режиме. Впрочем, такой подход не разработан.

В настоящее время более понятным нужно считать подход, называемый фибрильным динамо [336, 337, 225]. Здесь в отличие от рассмотренного в предыдущем подразделе считается, что диаметр фибрил δ постоянен. Тот этап следует считать предваритель-

ным, на котором формируется очень тонкая трубка, а в дальнейшем ее радиус остается постоянным и «работает» динамо.

В этой модели предполагается, что фотосфера (да и конвективная зона) пронизаны тонкими трубками, слабоизогнутыми, причем соседние трубки почти параллельны друг другу. Самых трубок очень много, или плотность трубок велика, что приводит к сильной реакции поля на движение. С одной стороны, из-за этого происходит проскальзывание трубки относительно вещества, с другой — модификация самого движения, его двумеризация с направлением вектора скорости, почти параллельным трубкам. И то и другое классифицируется как ослабление индукционных эффектов. Напомним, что все трудности динамо были связаны со слишком высокой проводимостью или индуктивностью (см. разд. 7.3).

Ключевым моментом модели является предположение о пересоединении трубок, в точности напоминающее изображенное на рис. 5.5, б, в, только силовые линии теперь нужно трактовать как трубки. В частности, если сталкиваются две параллельные трубки, поля которых антипараллельны друг другу, то пересоединение приводит к разбегу двух трубок на отдельные петли и в конце концов к аннигиляции полей. В общем случае процесс, аналогичный изображенному на рис. 5.5, б, в, не допускает сильного запутывания трубки турбулентностью (в отличие от запутывания силовых линий, см. гл. 4). В результате изгибания трубки появятся петли, которые отделятся от материнской трубки, оставляя последнюю почти невозмущенной. Да и само изгибание ослабляется из-за противодействия сильного поля трубки. Это тоже ослабление индукционных эффектов.

В целом в этой модели солнечный цикл должен происходить так, как на рис. 3.2, только силовые линии трактуются как трубки. Слабым местом модели является вопрос о пересоединении силовых трубок. По мнению Паркера [336], пересоединение происходит из-за потери равновесия при столкновении двух трубок. Предположение правдоподобное, но недоказанное в отличие от взаимодействия двух трубок в разреженной атмосфере (малого давления p) (см. рис. 5.13). Тем более что скорость пересоединения — вопрос полностью открытый.

Имеется модификация фибрильного динамо, называемого жгутовым: поля сосредоточены в жгутах толщиной $\delta = 3 \cdot 10^8$ см (см. [375]).

Мелкомасштабные поля. Имеются попытки объяснить поля супергранул и гранул как результат концентрации поля фибрил на краю ячеек, где происходит сток вещества. Поля супергранул действительно наблюдаются в виде сетки, образованной краями ячеек, и это объяснение, по-видимому, единственно. Что касается гранул, то такое объяснение не годится. Действительно, согласно модели, фибриллы с магнитным потоком $\geq 10^{17}$ Мкс расходятся на расстоянии $4 \cdot 10^8$ см друг от друга (иначе не обеспечить среднего поля ~ 1 Гс). Они могли бы находиться ближе друг к другу, если бы допускались соседние фибриллы с противоположно направленными

полями. Но, как мы видели выше, такие пары аннигилируют. Поэтому не представляются возможными флуктуации поля на размерах гранул ($3 \cdot 10^7$ см).

Движение гранул не способно существенно деформировать трубку, так чтобы сформулировать петлю: это видно из простой оценки (7.20). Поэтому предложенное объяснение поля гранул как результат действия мелкомасштабного динамо (см. разд. 7.5) оказывается единственным.

Гидростатика. После того как фибрилла сформирована, ее диаметр не меняется. Сама форма фибриллы определяется гидростатическим равновесием: внутреннее давление (магнитное плюс плазменное) уравнивается внешним. Уже в первых работах по СТС предполагалось, что диаметр фибриллы может меняться вдоль нее. Это связано с двумя обстоятельствами: 1) наличием азимутальной составляющей B_φ — различной в разных местах; 2) убыванием внешней плотности в гравитирующей среде.

На самом же деле первая причина не приводит к переменному сечению фибриллы, находящейся в равновесии. Действительно, фибрилла может быть классифицирована как вытянутая магнитная конфигурация. Равновесие может быть единственным — одномерным: поле зависит только от s — расстояния до центра трубки, так что B_φ не зависит от координаты вдоль оси трубки (см. разд. 5.5).

Что касается второй причины — силы тяжести, то, действительно, трубка расширяется при выходе в атмосферу (см. рис. 5.22). Но расширение происходит на высоте однородной атмосферы. Для двумерной (зависящей от y, z) изотермической ситуации это связано с тем, что конфигурация снова оказывается вытянутой в специальной системе координат (5.46). По-видимому, такое же утверждение можно высказать относительно осесимметричной конфигурации ($\partial_\varphi = 0$, поле зависит только от s и z). Если это так, то существование осесимметричной тонкой трубки, длина которой превышает высоту однородной атмосферы, становится невозможным.

Как говорилось выше в настоящем разделе, поля соседних фибрилл, если они антипараллельны, пересоединяются. Для вертикальных фибрилл, выходящих в хромосферу и корону, пересоединение происходит в короне из-за потери равновесия и формирования токового слоя (см. разд. 5.12). В результате пересоединения поле соседних фибрилл уже не будет подниматься в корону. Оно примет вид арки, соединяющей фибриллы. Итак, часть магнитного потока фибрилл будет уходить в корону, а часть — замыкаться на соседних фибриллах. Именно такая картина и наблюдается [261]. При погружении такой арки произойдет сближение и исчезновение противоположных полей, при выходе на поверхность, наоборот, противоположные поля удаляются [300, 307].

7.7. Спикулы и серджи. Рентгеновские яркие точки

Ряд явлений в хромосфере и короне связан с выбросами вещества в тонких каналах. Естественно считать, что каналами служат магнитные поля. Приведем примеры. Прежде всего, это спикулы, макроспикулы и серджи (которые авторы работы [202] расценивают как гигантские спикулы) и рентгеновские яркие точки (в короне).

Во всех этих случаях выбросы простираются на большие высоты, значительно превышающие высоту однородной атмосферы H и баллистическую высоту. Факт удивительный, поскольку, с одной

стороны, силовые линии поля, как правило, расходятся веером при выходе в корону (т. е. убывают на высоте H), с другой — необходима дополнительная сила, способная поднять вещество на большие высоты.

Механизм ускорения плазмы вверх, аналогичный ускорению



Рис. 7.3. Формирование токового слоя

плазмы в солнечном ветре, здесь не годится, и самым приемлемым оказался механизм Пикельнера [138, 202] — ускорение в квазистационарном ТС (см. разд. 6.5). И действительно, поле одного знака «разваливается» или расходитс веером при выходе в хромосферу и корону из-за магнитного давления. Поля противоположных знаков, наоборот, поджимаются друг к другу (тоже из-за магнитного давления) и поэтому простираются высоко, как, например, в хромосфере (см. рис. 5.2). Кроме того, поле в хромосфере топологически неравновесно (см. разд. 5.4, 5.12), поэтому на линии смены полярности образуется ТС. В результате, во-первых, в области ТС происходит омический разогрев плазмы, что приводит к свечению в той или иной части спектра, и, во-вторых, происходит ускорение плазмы вверх — выше точки пересоединения и вниз — ниже ее, и все это в узком ТС, как на рис. 6.4, а. Сама же точка пересоединения находится выше точки B (см. рис. 5.2), но ниже наблюдаемого выброса. Таким образом, по-видимому, возникают рентгеновские яркие точки при аннигиляции поля двух соседних фибрил (см. конец разд. 7.6).

Мы использовали биполярную конфигурацию: основание поля на фотосфере представлено в виде двух противоположно направленных вертикальных полей. Для объяснения спикул (связанных с полем супергранул) и серджей (поле активной области) привлекаются более сложные конфигурации [202], а именно: начальное поле двумерное (см. рис. 5.11), $B_x = 0$. Здесь уже использована квадрупольная группа: четыре «пятна» — в точках A, C' одной полярности, в точках A', C — противоположной. Только теперь в отличие от рис. 5.11, где движение оснований арок происходит вдоль оси x , мы будем сближать их вдоль y -направления. В результате X -точка на оси z превратится в нейтральную линию, как на рис. 5.4, где сформируется ТС (рис. 7.3).

Вспышки представляют собой наиболее яркое проявление солнечной активности, связанное с большой геоэффективностью. По этой причине они являются объектом пристального изучения. Все многочисленные аспекты вспышек мы, конечно, не сможем осветить. Остановимся только на глобальных вопросах физики этого явления.

Но даже «общие» проблемы вспышек кажутся разноплановыми и необозримыми (при нашем весьма ограниченном объеме книги). А главной трудностью является отсутствие единой и последовательной теории. Существует только ряд подходов. Мы постараемся осветить вопросы, представляющие «программу-минимум» для понимания явления. Вопросы следующие (см. [389]):

1) откуда берется энергия вспышек?
 2) каким образом она внезапно выделяется за столь короткое время?

3) каким образом происходит трансформация энергии в нагрев и ускоренные частицы?

Еще один вопрос считается в настоящее время ключевым: как объяснить флуктуации излучения [390]? Мы сможем, однако, только ко поверхностно коснуться его.

Источником энергии вспышек большинство исследователей считают магнитное поле. Будем придерживаться этой точки зрения. Все три проблемы взаимосвязаны, и мы так и будем обсуждать их — в комплексе.

Типы моделей вспышки. Большая часть моделей охватывает проблему не целиком, что естественно ввиду разноплановости самих вопросов. Кроме того, вспышки разных мощностей (баллов) и разных типов не обязаны иметь одинаковую природу! Например, исследуется возбуждение заданными ускоренными частицами колебаний и радиовсплесков, а также нагрев ими хромосферы. Или возникновение вспышки связывают с интенсивными движениями на основании наблюдательных данных, а возникновение самих движений не рассматривается, и т. д. В ряде теорий привлекается неустойчивость и плазменная турбулентность как панацея от всех трудностей. Однако, как мы видели в разд. 6.1—6.3, неравновесие оказалось более содержательным понятием, нежели неустойчивость, а в разд. 6.6 говорилось о вспомогательной роли микротурбулентности.

Проиллюстрируем сказанное на важном примере конфигурации рис. 5.11, переходящей в конфигурацию рис. 7.3. При не слишком медленном сдвиге пятен энергия, накопленная в ТС, растет. Допустим, что тиринг-неустойчивость, застabilизированная до некоторого момента, разовьется и приведет к разрыву слоя. Какая при этом выделится энергия? Как говорилось в разд. 6.5, выделенная энергия сравнима с той, которая накоплена в самом ТС, т. е. в L/δ раз меньше энергии тока (6.14). Последней хватило бы на вспышку, а энергии в самом ТС совершенно недостаточно даже для самой слабой вспышки.

Все это происходит потому, что в ТС сосредоточена только малая часть магнитного потока, который будет пересоединен при переходе от конфигурации рис. 7.3 в конечное состояние. Можно поэтому надеяться на то, что после разрыва ТС к оси z будет подведен новый поток, ТС вновь будет создан, опять разорвется и т. д. В конце концов весь магнитный поток будет пересоединен. Но за какое время? Описанная ситуация соответствует включению плазменной турбулентности, а в разд. 6.6 было найдено время (6.20), на много порядков большее времени вспышки. Все дело в медленности эвакуации вещества из ТС, что заставляет держать уровень турбулентности на пороговом, т. е. малоэффективном, режиме.

Указанная трудность оказывается общей для всех моделей, в которых вся непотенциальная составляющая поля сосредоточена в ТС. В этом случае возникают квазистационарные ТС (см. разд. 6.5), имеющие большое значение сами по себе (см., например, разд. 7.7), но едва ли — для вспышек, разве что для небольших (петельных) (см. модель всплывающего потока [349]).

Другой тип моделей может быть назван взаимодействием магнитных трубок: термин включает в себя то, что за рубежом называют «loop coalescence». Впрочем, не всякое взаимодействие представляет интерес. Так, потенциальное поле группы пятен (см. рис. 5.13) так и остается потенциальным полем почти всюду при столкновении трубок.

Как говорилось в разд. 6.5, имеется дилемма: либо пересоединение происходит медленно и существенная доля магнитной энергии трансформируется в нагрев и ускоренные частицы (т. е. велика джоулева диссипация), либо пересоединение происходит быстро, джоулева диссипация мала, т. е. вся энергия переходит в кинетическую. Нам приходится выбрать вторую возможность, полагая, что скорости возникшего движения велики — порядка альвеновской [178]. Они носят характер МГД-турбулентности [274]. Интенсивные движения преобразуются в ударные волны, энергия которых уже довольно эффективно и быстро преобразуется в тепло (см. (6.16)). И действительно, согласно наблюдениям большие скорости опережают развитие вспышки [381].

Изложим кратко суть теорий, дающих ответ на поставленные выше вопросы.

Двухленточные вспышки. Они могут возникнуть в аркадах с магнитным островом (см. рис. 6.3). В заштрихованной части располагается волокно. Вспышка связывается с активизацией волокна. Начало активизации, как иногда считают, обязано нерезистивной неустойчивости. Однако в свете сказанного в разд. 6.1, 6.3 кажется более естественным говорить о резистивной неустойчивости, приводящей к топологическому неравновесию, или даже просто об изначально топологическом неравновесии (см. конец разд. 6.3). Так или иначе, но ТС образуется. Как видно из графика рис. 6.5, долгое время ТС ведет себя как квазистационарный — без большой мощности энерговыделения. Эту фазу (см. рис. 6.5, этап I) можно называть довспышечной.

Затем наступает импульсная фаза (см. рис. 6.5, этап II), сопровождаемая импульсным микроволновым всплеском, радиовсплесками типа III и жестким рентгеновским излучением. Как говорилось выше, большое число ускоренных частиц появляется только после возбуждения ударных волн.

Ускоренные частицы и мощный тепловой поток направляются вдоль силовых линий в нижнюю часть хромосферы, вызывая свечение в H_{α} . Наступает главная (flash) фаза. Свечение происходит в обоих основаниях арки в виде двух лент. В процесс пересоединения включаются все более высокие силовые линии, основания их располагаются все дальше и дальше друг от друга. В результате ленты тоже удаляются друг от друга. Сильный разогрев плазмы (см. рис. 6.3) приводит к сильному ее раздуванию. Петли выходят высоко в корону. Их называют «послевспышечными» петлями.

Многопетлевые модели. Конфигурация рис. 6.3 является простейшей в модели взаимодействующих трубок. В [394] была предложена модель вспышки как результат слияния двух петель (или двух скрученных трубок): в виде сливающихся двух арок. Здесь непосредственно привлекается аналогия со сливающимися магнитными островами (см. разд. 5.11). Быстрые электроны оказываются захваченными в магнитных петлях, вызывая микроволновое излучение из их верхних частей. В нижних же частях, как и в модели двухленточной вспышки, происходит излучение рентгеновских и γ -лучей. Авторы [394] объясняют наличие ускоренных ионов, а также флуктуации излучения. Последние они связывают с осцилляциями, накладываемыми на процесс пересоединения конфигурации рис. 5.19. Эта модель, по-видимому, наиболее разработанная. Здесь привлечены многочисленные экспериментальные данные в оптическом и радиодиапазонах (см., например, [217, 306]). В частности, картина сливающихся магнитных петель довольно часто получается при интерпретации радиоданных.

Дальнейшее развитие этого подхода — привлечение многопетлевой модели [368]. Старрок [390] предложил модель, в которой взаимодействуют не столько скрученные трубки, сколько переплетенные. Это случай топологически неинвариантных, а потому топологически неравновесных полей (см. разд. 5.8). Предполагается, что переплетенными они выходят в корону, т. е. не требуется специальных движений, усложняющих конфигурацию, как на рис. 5.14. Хотя сильно переплетенные поля детально не изучены, качественно ясно, что они действительно топологически неравновесны (см. разд. 5.8). Более сложным является вопрос о скорости пересоединения. По всей вероятности, в ряде случаев пересоединение быстрое. Например, когда отдельная трубка в переплетении с другими скручена и «левым и правым винтом» вдоль своей длины, она не может находиться в равновесии. Наличие разрывов, видимо, не изменит ситуацию, и пересоединение должно происходить быстро. Во всяком случае, если трубки еще не скручены, большая скорость пересоединения будет обеспечена.

Вспышки происходят в основном вдоль линии раздела поляр-

ностей (нормальное к поверхности поле $B_z = 0$). Поэтому в [390] предполагается, что основная трубка наибольшей длины протягивается вдоль этой линии. Она же обозначает местонахождения филамента (напомним, что вспышка связана с активизацией филамента). В результате пересоединения и «распутывания» поля трубка высвобождается и поднимается высоко в корону или даже переходит в открытую конфигурацию. Предполагается также, что из остатков трубок в короне образуется тороидальное поле, охватывающее нашу трубку наибольшей длины. Здесь возникает ловушка для электронов, последние генерируют радиовсплески IV типа. Если конфигурация открывается, то тороид выбрасывается в виде транзientа. На фронте транзientа возбуждается ударная волна, вызывающая, в свою очередь, радиовсплески II типа (см. [390]).

Многопетлевая модель дает возможность объяснить флуктуации излучения, связывая их с пересоединением мелких трубок (или как бы тонкой структуры сложного переплетения поля). Более того, можно объяснить гомологические вспышки (возникающие последовательно в одной и той же активной области) как результат пересоединения мощных магнитных трубок сложной магнитной структуры.

Наблюдательные проявления. Наблюдение корональных магнитных полей — дело чрезвычайно сложное. Основная надежда на изучение фотосферных полей. Магнитографические измерения дают в первую очередь продольные поля (по лучу зрения — B_z -составляющую). Поперечные измеряются с гораздо более низкой точностью (по меньшей мере на порядок хуже).

Однако B_z -составляющая не является каким-либо индикатором вспышки! Во-первых, продольное поле на фотосфере ничего не «знает» о том, имеется ли магнитный остров в короне, т. е. какая там конфигурация: в виде простой арки (см. рис. 5.10, *a*) или в виде, представленном на рис. 6.3. А ведь это вопрос о том, быть или не быть двухленточной вспышке! Аналогично B_z -составляющая не «знает» о том, является ли поле в короне простым потенциальным или запутанным, как на рис. 5.14. Во-вторых, упрощение поля после вспышки никак не сказывается на B_z -составляющей на фотосфере. Последняя просто не меняется.

Не очень информативным является и поперечное поле. Так, после вспышки не изменится шир конфигурации рис. 6.3 в соответствии с наблюдениями [262]. Да и вообще, поперечное поле меняется несущественно.

Тем не менее нельзя сказать, что теория беспомощна в прогнозировании вспышек и наблюдения не смогут проверить теорию. Можно предложить следующие наблюдательные тесты.

1. Самым грубым является проверка третьего соотношения (5.22): энергия магнитного поля на большой площади фотосферы не должна превышать энергию продольного. Нарушение его — явное указание на неравновесие коронального поля с неизбежным образованием ТС и активностью.

2. Более тонкой является проверка второго критерия разд. 5.6: измерение поперечных полей на линии раздела полярностей с тем, чтобы определить в ее окрестностях величину α согласно (5.21). Здесь должно выполняться $\alpha = 0$ или поперечное поле, если оно есть, должно быть квазиоднородным. Быстрое изменение поперечного поля (так что $\alpha \neq 0$) явно свидетельствует об отсутствии равновесия, здесь можно ожидать повышенную активность и корреляцию со вспышками.

3. Наиболее трудным, но вместе с тем и наиболее желательным явилось бы построение карт величины α на фотосфере согласно (5.21) и затем по процедуре, описанной в разд. 5.6, расчет всего поля в короне. Тогда будет создана основа прогнозирования вспышек.

7.9. Открытые и замкнутые конфигурации. Транзиенты

Замкнутыми конфигурациями называют поля, силовые линии которых замыкаются на поверхность Солнца, а открытыми — поля, часть силовых линий которых уходит на бесконечность. Эти определения, однако, нуждаются в уточнении: строго говоря, часть (пусть малая) силовых линий любой конфигурации уходит на бесконечность. Дело в том, что очень высоко в короне и в солнечном ветре поле любой конфигурации очень слабое (и не обращается в нуль!). Оно вытягивается солнечным ветром и становится радиальным. Существуют даже модели корональных полей: до определенной высоты над фотосферой (обычно равной $2,5R_{\odot}$) поле потенциально, а выше — радиально (модель «волосатого» шара, она описана, например, в [141]). Поэтому замкнутой конфигурацией следует называть такую, для которой большая часть магнитного потока замыкается на фотосферу, а малая уходит на бесконечность, а открытой — если немалая часть потока уходит на бесконечность. Поэтому слабое поле гигантского масштаба, например дипольное поле Солнца, — открытое, а сильное, потенциальное поле активной области, — замкнутое. В ряде работ эффектом солнечного ветра пренебрегают, что оправданно для неслабого поля активной области.

Выше были указаны два способа перестройки замкнутой конфигурации в открытую. В первом происходит неограниченное расширение простой аркады из-за сдвига оснований арки, в результате чего генерируется B_x -составляющая (см. рис. 5.10). Во втором верхняя часть аркады с магнитным островом (см. рис. 6.3) разрывается из-за топологического неравновесия и часть магнитного потока острова (если поток достаточно велик) вырывается и уходит в солнечный ветер.

Вернемся к конфигурации рис. 5.10. Как говорилось в разд. 5.7, потеря равновесия, приводящая к неограниченному раздуванию конфигурации, наступает, когда B_x -составляющая становится достаточно большой. Оказывается, что даже беско-

нечно малое B_x , накладываемое на потенциальную конфигурацию (с $B_x = 0$), тоже может привести к потере равновесия [304]. Это произойдет, если основания арок искусственно сдвигать так, чтобы генерируемое продольное поле B_x отвечало $\alpha = \text{const}$ на фотосфере (по формуле (5.21)). Дело в том, что поле с $\alpha = \text{const}$ должно обладать бесконечной энергией (см. разд. 5.6), а потому нереализуемо. Фактически при этом натяжение силовых линий в верхней части арки (очень слабое, так как и здесь поле мало) не выдерживает магнитного давления $B_x^2/8\pi$ и поле начинает раздуваться. Впрочем, при малом B_x затрагивается только часть магнитного потока и малая его часть будет уходить на бесконечность. По нашей уточненной классификации такое поле следует считать замкнутым.

Данный процесс — раздувание поля — происходит эффективно, если, грубо говоря, $B_x^2/8\pi > (B_y^2 + B_z^2)/8\pi$. Очевидно, что то же самое произойдет при разогреве арки так, чтобы p стало больше $(B_y^2 + B_z^2)/8\pi$ (а $B_x = 0$). В обычном состоянии $p \ll \ll B^2/8\pi$ ($\beta \ll 1$), поэтому необходим мощный разогрев. В ряде случаев его приписывают вспышке. Однако, как говорилось в в разд. 5.7, 6.3, простая арка (см. рис. 5.10) устойчива и равновесна. Конечно, отделение раздувшейся магнитной неоднородности от арочного поля связано с пересоединением, а значит, с ТС. Однако нет никаких оснований считать, что пересоединение происходит быстро, так что возникший ТС — квазистационарный, а вспышка не появляется. Имеется другая возможность разогрева арки — МГД-волнами, идущими из конвективной зоны [146, 147]. Описанный пример иллюстрирует возникновение транзientа, не сопровождающегося вспышкой.

Иная ситуация с конфигурацией рис. 6.3. При очень малом острове арка фактически не отличается от простой (см. рис. 5.10, а). Умеренный остров (магнитный поток в нем сравним с внешним) приведет к вспышке, не сопровождающейся транзientом. Наконец, если остров велик, то происходит вспышка и генерируется транзient (см. разд. 6.3). Аналогично обстоит дело с многопетлевыми моделями вспышек (см. разд. 7.8). Транзient (и соответственно раскрытая конфигурация) произойдет при достаточной мощности энерговыделения при слиянии двух арок и в более сложной модели, когда тороидальное поле короны (охватывающее основную магнитную трубку) обладает достаточным магнитным потоком.

Отметим, что реальная открытая конфигурация не обладает бесконечной энергией. Это связано не столько с ограниченностью поля самой областью солнечного ветра, сколько с радиальной расходимостью силовых линий (на расстоянии, большем $2,5 R_\odot$). Поле убывает как r^{-2} , а энергия как r^{-4} при $r \rightarrow \beta$. Тем не менее открытая конфигурация топологически неравновесна. В простейшем случае это стример, неравновесие которого показано в разд. 5.4, 5.12. Таким образом, «обычная» замкнутая configura-

ция в результате описанных выше процессов раскрывается. Но в таком состоянии она «не успокаивается», будучи топологически неравновесной. Возникший ТС и пересоединение переводят ее опять в замкнутую (но этот процесс медленный, ТС квазистационарный). Отметим, наконец, что открытая конфигурация типа стримера может возникнуть вообще без бурных процессов: при сближении фибрил с противоположно направленными полями (см. разд. 7.6).

7.10. Протуберанцы

Конденсация вещества в солнечной короне приводит к образованию протуберанцев [141]. Здесь нас будут интересовать только вопросы равновесия и образования ТС. Прежде всего следует заметить, что практически во всех работах, когда говорится о ТС (будь то конденсация протуберанца в ТС или равновесие в ТС), речь фактически идет о плазменном слое. Например, когда рассматривается протуберанец в конфигурации типа стримера (см. рис. 5.2), то неизбежное здесь пересоединение и связанное с этим наличие компоненты поля поперек слоя (B_y -компонента) и джоулев нагрев не учитываются. Между тем здесь нужно говорить именно о ТС, а не о плазменном слое (см. разд. 5.4).

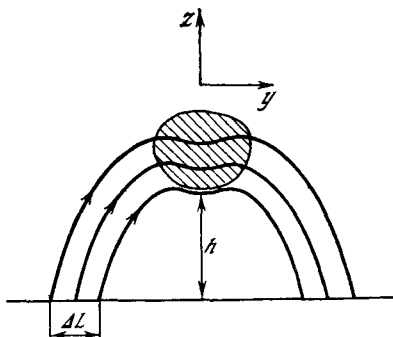


Рис. 7.4. Равновесие протуберанца (заштрихован) в магнитном поле

Можно указать три типа образования и равновесия протуберанцев. Первый — конденсация в петле или магнитной трубке; второй — протуберанец, «подвешенный» в магнитном поле, и третий — протуберанец в ТС. Первый тип дает спокойный протуберанец: конденсация связана с особыми условиями нагрева (точнее, охлаждения) коронального вещества. Мы не будем на этом останавливаться. Обратимся ко второму и третьему типам.

Поддержка протуберанца в магнитном поле. Наиболее старая идея: именно магнитное поле не дает холодному и тяжелому протуберанцу упасть на поверхность Солнца. Простейший пример — модель Киппенхана—Шлютера (К—Ш): тяжелый протуберанец прогибает горизонтальное поле, причем натяжение силовых линий компенсирует силу тяжести. Вдали от протуберанца поле однородное, т. е. потенциальное. Это обстоятельство породило надежду, что модель К—Ш может быть обобщена на арочную конфигурацию с прогибом (рис. 7.4). На самом деле модель К—Ш принципиально отличается от модели, представленной на рис. 7.4. Действительно, будем считать, что токи, поддерживающие проту-

беранец, текут только в области протуберанца, как в модели К—Ш. Это означает, что вне заштрихованной зоны на рис. 7.4, и в частности вблизи фотосферы, поле потенциально. Тогда в уравнении равновесия (5.45) следует положить $B_x = 0$ и $dp_0/dA_x = 0$. Но в этом случае решение уравнения $\Delta A_x = 0$ суть потенциальное поле всюду — в виде арочной структуры без прогиба. Если же допустить $B_x \neq 0$ (но $dp_0/dA_x = 0$ по-прежнему), то поле всюду бессиловое, тоже арочное без прогиба. Короче говоря, если давление на фотосфере $p_0 = \text{const}$, то оно выпадает из условия равновесия (5.45), поле вообще «не знает» о существовании протуберанца и, конечно, не прогибается под его тяжестью.

Таким образом, для удержания протуберанца высоко в короне давление на фотосфере p_0 должно быть распределено особым образом. Более того, экспоненциальный множитель перед dp_0/dA_x в (5.45) делает очень чувствительным это распределение в зависимости от токов в области протуберанца. Выпишем соответствующие оценки. Обозначим через Δz глубину «ямы», в которой находится протуберанец, Δy — ширину в y -направлении, h — высоту протуберанца и ΔL — расстояние между основаниями силовых линий, пересекающих протуберанец. Равновесие в верхней части арки не отличается от модели К—Ш, а именно натяжение силовых линий компенсирует яму тяжести: $(1/4\pi) B_y \partial_y B_z = \rho g$, или $B_y B_z / 4\pi \Delta y \approx \rho g$. Переходя к высоте однородной атмосферы, получим

$$B_y B_z / 4\pi \Delta y = p(h) / H(h). \quad (7.25)$$

Равновесие поля в горизонтальном направлении приводит к равенству

$$p + B_z^2 / 8\pi = \text{const}. \quad (7.26)$$

Комбинируя (7.25) и (7.26), получим (как и в модели К—Ш)

$$\Delta z = H(h), \quad \Delta y = H(h) B_y / B_z. \quad (7.27)$$

В теории К—Ш отношение B_z/B_y произвольно. В частности, при больших значениях B_z , $B_z \gg B_y$, слой узок и конфигурация напоминает ТС: B_z меняет знак. Исследовалась даже тиринг-неустойчивость слоя (с B_y -компонентой, стабилизирующей тиринг, см. [369]) наподобие хвоста магнитосферы (см. разд. 6.1). Чем больше B_z/B_y , тем больше провисает протуберанец и тем больше его масса.

Для конфигурации рис. 7.4 ситуация иная. Большая величина отношения B_z/B_y в модели К—Ш соответствует также большому току ($\sim B_y/\Delta y$), поддерживающему протуберанец. Здесь же ток может течь слабый: согласно (5.45) ток ΔA_x пропорционален давлению, малому на больших высотах. Поскольку прогиб невелик, трубка снижается только на глубину H (см. (7.27)), давление в протуберанце $p(h)$ не сильно отличается от давления в окружающей короне на той же высоте $p_K(h)$, $p_K(h) \approx p(h)$. С по-

мощью непосредственной оценки (5.45) получим

$$\begin{aligned} |\operatorname{rot} \mathbf{B}| &= 4\pi (p(h) - p_K(h))/B\Delta L, & B_z/\Delta y &= \\ &= 4\pi p_K(h)/B_y\Delta L. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Сравнивая (7.28) с (7.25), а также пользуясь (7.26), получим

$$\begin{aligned} \Delta L &= H(h), & (7.29) \\ B_z/B_y &= (p_K(h) 8\pi/B_y^2)^{1/2} = \beta^{1/2}(h) \ll 1. \end{aligned}$$

Таким образом, в этой модели ток мал (поскольку $B_z/B_y \ll 1$), величина ΔL (фактически вертикальная толщина протуберанца) тоже мала: $\Delta L = 10^7$ см. Что касается ширины, то согласно (7.27) получим $\Delta y = 3 \cdot 10^8$ см — величина приемлемая.

Резюмируя сказанное о конфигурации рис. 7.4, отметим следующее. Малость величины ΔL и, главное, необходимость некоего (искусственного) распределения давления на фотосфере для поддержания протуберанца создают трудности для реализации модели. Кроме того, малость тока согласно (7.29) говорит о том, что конфигурация реализуется как малое возмущение потенциального поля. Здесь трудно ожидать проявления неустойчивости, поэтому модель в лучшем случае представляет спокойный протуберанец.

Кажется более естественным предположить, что поддержка протуберанца, осуществляемая полем, изображенным на рис. 6.3, — идея, восходящая к модели Куперуса и Рааду. Здесь силовые линии, проходящие через протуберанец, не замыкаются на фотосферу, что избавляет от трудностей модели, представленной на рис. 7.4. Кроме того, неустойчивость или, скорее, магнитное неравновесие выведет протуберанец из спокойного состояния подобно двухленточной вспышке (см. разд. 7.8). В результате он превратится в эруптивный.

Поддержка в токовом слое. Одну возможность возникновения ТС в результате сильного свисания протуберанца в конфигурации рис. 7.4. мы уже отвергли в предыдущем подразделе.

Идея об образовании протуберанца в нейтральном слое кажется привлекательной, хотя она сразу сталкивается с трудностью: плазма не всегда удерживается в нем. Так, в стримере (см. рис. 5.2) вещество будет просто стекать вниз под действием силы тяжести вдоль силовых линий на фотосферу. Конечно, вблизи оси симметрии давление, а значит, и плотность вещества велики. Это связано с образованием ТС со свойством (6.11). Но толщина ТС δ очень мала. Согласно (6.8) $\delta = 10^4 \div 10^5$ см.

Здесь, однако, следует пользоваться не столько ТС, сколько плазменным слоем, как уже говорилось в начале раздела. Плотность плазмы в слое значительно превышает окружающую, что может служить основанием для конденсации протуберанца. Для избежания стекания вещества вниз расположим нейтральный слой горизонтально. Строго говоря, это невозможно. Но можно сделать его почти горизонтальным, как на рис. 5.4,б. Другие приме-

ры можно найти в [405], выбирая случаи почти горизонтальных нейтральных слоев. Стеkanie вещества если и происходит, то медленно. В окрестности нейтрального слоя все-таки образуется ТС (см. разд. 5.4), но, как сказано, толщина его мала. Этот ТС помещен в гораздо более обширный плазменный слой, именно он нас и интересует.

Оценим толщину плазменного слоя δ_p по формуле (1.140). Принимая начальный масштаб поля $L = 10^{10}$ см, получим $\delta_p = 10$ см (величина вполне приемлемая). Не следует, однако, забывать, что оценка соответствует адиабатическому сжатию слоя, сопровождаемому ростом температуры. А конденсация протуберанца сопровождается его охлаждением. Нетрудно обобщить (1.140), повторяя расчет разд. 1.6:

$$\delta_p = L\beta^2(0)(T_{\text{пр}}/T_{\text{к}})^2, \quad (7.30)$$

где $T_{\text{пр}}$, $T_{\text{к}}$ — температура протуберанца и короны соответственно. При адиабатическом сжатии $T \sim p^{1-1/\gamma} \sim \beta(0)^{1/\gamma-1}$ и (7.30) переходит в (1.140). Изотермический процесс соответствует случаю $\gamma = 1$ в (1.140) и $T_{\text{пр}} = T_{\text{к}}$ в (7.30). Ввиду того что $T_{\text{пр}}/T_{\text{к}} = 10^{-3}$, толщина δ_p оказывается совсем ничтожной (порядка 1 см).

Такая толщина, однако, соответствует случаю, когда снижение температуры происходит не позже сжатия: при этом вещество сгребается из очень малой области. Допустим противное. Пусть плазменный слой формируется сначала адиабатически, т. е. температура первоначально растет. Тогда в слое толщиной δ_p по (1.140) плотность возрастет в $\beta(0)^{-1/\gamma}$ раз. После этого охладим слой. Тогда сжатие произойдет на очень малом участке и величина δ_p по (7.30) будет отражать размер, на котором меняется магнитное поле (на самом же деле, учитывая наличие ТС, поле будет меняться на толщине $\delta \gg \delta_p$ по (7.30)). В остальной части «старого» плазменного слоя толщиной δ_p по (1.140) особых изменений происходить не будет. Разве что поле станет квазиоднородным, а плотность существенно не изменится.

Полученный таким образом протуберанец удовлетворяет многим необходимым условиям. Но не всем: возрастание корональной плотности в $\beta(0)^{-1/\gamma} \approx 30$ раз, по-видимому, недостаточно для формирования протуберанца. Приходится предположить, что охлаждение слоя (происшедшее из-за усиленного излучения вещества, плотность которого возросла в $\beta(0)^{-1/\gamma}$ раз) приводит к дополнительному всасыванию вещества из окружающей короны вдоль силовых линий.

8.1. Уравнение Бюргера

Мы начинаем с рассмотрения слабой ударной волны, нормаль к фронту которой ориентирована вдоль магнитного поля (параллельная ударная волна). При выбранной геометрии магнитное поле не влияет на движение плазмы. Воспользуемся уравнениями обычной газодинамики и выведем из них приближенное уравнение, описывающее распространение слабонелинейной одномерной волны с учетом диссипации ее энергии:

$$\partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u = 0, \quad (8.1)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u = -\rho^{-1} \partial_x p + (4\eta_1/3 + \eta_2) \partial_x^2 u, \quad (8.2)$$

$$\partial_t s + u \partial_x s = (\kappa/\rho T) \partial_x^2 T. \quad (8.3)$$

Поскольку и нелинейность, и диссипация будут считаться малыми эффектами, мы отбросили в правой части (8.3) член, пропорциональный $(\partial_x u)^2$, который имеет третий порядок малости. Преобразуем уравнение (8.1): пользуясь уравнением состояния $\rho = \rho(p, s)$, находим

$$\partial_t \rho + u \partial_x \rho = (\partial_t \rho)_s (\partial_t p + u \partial_x p) + (\partial_s \rho)_p (\partial_t s + u \partial_x s). \quad (8.4)$$

Подставив (8.4) в уравнение (8.1) и учитывая (8.3), получим

$$\partial_t p + u \partial_x p + (\partial_p \rho)_s \rho \partial_x u = -(\kappa/\rho T) (\partial_p \rho)_s (\partial_s \rho)_p \partial_x^2 T. \quad (8.5)$$

Далее используем приближенное равенство

$$\partial_x^2 T \approx (\partial_p T)_s \partial_x^2 p$$

(остальные слагаемые дадут в уравнении (8.5) члены III порядка) и термодинамическое тождество¹

$$T(c_V^{-1} - c_p^{-1}) = -(\partial_p \rho)_s (\partial_p T)_s (\partial_s \rho)_p.$$

С помощью этих равенств приводим уравнение (8.5) к виду

$$\partial_x u + \rho^{-1} (\partial_p \rho)_s (\partial_t p + u \partial_x p) = \kappa \rho_0^{-2} c_s^{-2} (c_V^{-1} - c_p^{-1}) \partial_x^2 p. \quad (8.6)$$

¹ Оно выводится следующим образом:

$$\begin{aligned} T c_V^{-1} &= (\partial_s T)_{V=\rho^{-1}} = (\partial_s T)_\rho = \frac{\partial(T, \rho)}{\partial(s, p)} \frac{\partial(s, p)}{\partial(s, \rho)} = \\ &= (\partial_p \rho)_s \{(\partial_s T)_p (\partial_p \rho)_s - (\partial_p T)_s (\partial_s \rho)_p\} = T c_p^{-1} - (\partial_p \rho)_s (\partial_p T)_s (\partial_s \rho)_p. \end{aligned}$$

Здесь в правую часть подставлены невозмущенные величины ρ_0 и $c_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_{s_0}$.

Теперь исключим из уравнений (8.2) и (8.6) переменные u и ρ и получим одно уравнение, которое будет содержать только переменную часть давления $p' = p - p_0$ и невозмущенные величины. При этом будем учитывать в левых частях уравнений только члены не выше второго порядка малости, как уже сделано в правых частях.

Воспользуемся тем, что в квадратичных членах можно принять те же соотношения между малыми возмущениями, которые выполняются в линейной теории, т. е. для звуковых волн малой амплитуды

$$\begin{aligned} u &\approx c_s \rho' / \rho_0 \approx p' / c_s \rho_0, & \rho &\approx \rho_0 + p' / c_s^2, \\ \rho^{-1} (\partial_\rho p)_s^{-1} &\approx c_s^{-2} \rho_0^{-1} + p' / c_s^4 \rho_0^2 - \rho_0 (\partial_p^2 V)_s p'. \end{aligned} \quad (8.7)$$

С помощью этих соотношений находим

$$\begin{aligned} u \partial_x u + \rho^{-1} \partial_x p &\approx \rho_0^{-1} \partial_x p', \\ \rho^{-1} (\partial_\rho p)_s^{-1} (\partial_t p + u \partial_x p) &\approx c_s^{-2} \rho_0^{-1} \partial_t p' + c_s \rho_0 (\partial_p^2 V)_s p' \partial_x p' \end{aligned}$$

и записываем уравнения (8.2), (8.6) в виде

$$\begin{aligned} \partial_t u + \rho_0^{-1} \partial_x p' &= c_s^{-1} \rho_0^{-1} (4\eta_1/3 + \eta_2) \partial_x^2 p', \\ \partial_x u + c_s^{-2} \rho_0^{-1} \partial_t p' &= -c_s \rho_0 (\partial_p^2 V)_s p' \partial_x p' + (\kappa / c_s^2 \rho_0^2) (c_V^{-1} - c_p^{-1}) \partial_x^2 p'. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Продифференцировав первое из этих уравнений по x , второе по t и вычтя их друг из друга, получим

$$(\partial_x - c_s^{-1} \partial_t) (\partial_x + c_s^{-1} \partial_t) p' = 2\partial_x [a c_s^{-2} \partial_x^2 p' - b c_s^{-1} p' \partial_x p']. \quad (8.9)$$

Здесь a и b — постоянные коэффициенты:

$$\begin{aligned} a &= 2^{-1} c_s^{-3} [4\eta_1/3 + \eta_2 + \kappa V (c_V^{-1} - c_p^{-1})], \\ b &= (c_s^2 / 2V^2) (\partial_p^2 V)_s. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Для волны, распространяющейся вдоль оси x , естественно ожидать зависимости от координаты и времени вида $p'(x - c_s t, \epsilon x)$, где ϵ — малый параметр (в меру малости нелинейности и диссипации). Поэтому оператор $\partial_x + c_s^{-1} \partial_t$ имеет порядок ϵ , а оператор $\partial_x - c_s^{-1} \partial_t \approx 2\partial_x$ с точностью до членов порядка ϵ . Мы видим, таким образом, что уравнение (8.9) будет удовлетворяться, если

$$\partial_t p' + c_s \partial_x p' + b p' \partial_x p' = a c_s^3 \partial_x^2 p'^2. \quad (8.11)$$

Перейдем в этом уравнении к новым независимым переменным $t, \xi = x - c_s t$ и к новой зависимой переменной $P(\xi, t) = \epsilon p'(x, t)$. Тогда (8.11) превращается в уравнение Бюргерса

$$\partial_t P + P \partial_\xi P = \chi \partial_\xi^2 P, \quad (8.12)$$

где $\chi = ac_s^3$. Как оказалось [66, 162], уравнение Бюргера описывает более широкий круг явлений, чем те, для которых оно было выше получено. Мы используем его ниже для описания профиля стационарной ударной волны малой амплитуды.

8.2. Профиль параллельной ударной волны

Несмотря на то что уравнение Бюргера нелинейно, оказывается возможным получить его общее решение. Это достигается путем сведения уравнения (8.12) к линейному уравнению теплопроводности с помощью нелинейной подстановки

$$P(\xi, t) = -2\chi\partial_\xi \ln \varphi(\xi, t). \quad (8.13)$$

Из уравнения (8.12) получаем

$$\partial_\xi [\varphi^{-1} (-\partial_t \varphi + \chi \partial_\xi^2 \varphi)] = 0,$$

откуда

$$\partial_t \varphi - \chi \partial_\xi^2 \varphi = \varphi dF/dt,$$

где $dF(t)/dt$ — произвольная функция времени.

Подстановка

$$\varphi(\xi, t) = \tilde{\varphi}(\xi, t) \exp F(t)$$

приводит к уравнению теплопроводности для $\tilde{\varphi}$

$$\partial_t \tilde{\varphi} = \chi \partial_\xi^2 \tilde{\varphi}. \quad (8.14)$$

Поскольку $F(t)$ не влияет на значение $P(\xi, t)$, то можно переобозначить $\tilde{\varphi} \rightarrow \varphi$ и считать, что уравнению (8.14) удовлетворяет сама функция φ .

Общее решение уравнения теплопроводности хорошо известно:

$$\varphi(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\chi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \eta)^2}{4\chi t} - \frac{1}{2\chi} \int_0^\eta P_0(\eta') d\eta' \right\} d\eta, \quad (8.15)$$

где $P_0(\xi)$ — значение $P(\xi, 0)$, связанное с начальным значением φ формулой (8.13). С помощью (8.13), (8.15) нетрудно исследовать различные случаи распространения слабонелинейных волн в диссипативной среде.

Мы ограничимся рассмотрением ударной волны стационарного профиля, т. е. будем искать решение уравнения (8.11) вида $p'(\zeta)$, где $\zeta = x - u_{sh}t$, u_{sh} — скорость ударной волны (неизвестный постоянный параметр). Сама возможность существования стационарных волн связана с одновременным действием двух эффектов: нелинейного укручения фронта и диссипации, которые действуют в противоположных направлениях и компенсируют изменения профиля волны. Эффект нелинейности без диссипации приводит к укручению переднего фронта и образованию разрыва (см. разд. 2.1). Это означает на спектральном языке рождение

коротковолновых гармоник в спектре. Диссипативные эффекты ослабляют в первую очередь гармоники с большими k , так как коэффициент поглощения волн за счет вязкости и теплопроводности пропорционален k^2 (см. разд. 2.3). Диссипация без нелинейности привела бы к диффузионному расплыванию, т. е. неограниченному расширению переходной области. Взаимное уравновешивание этих тенденций делает возможным существование стационарных нелинейных волн с фронтом конечной толщины в диссипативной среде.

Учитывая, что $\partial_t p' = -u_{sh} \partial_\zeta p'$, приведем (8.11) к виду

$$\frac{d}{d\zeta} \left[(c_s - u_{sh}) p' + \frac{b}{2} p'^2 - \chi \frac{dp'}{d\zeta} \right] = 0,$$

откуда следует

$$\chi dp'/d\zeta = bp'^2/2 + (c_s - u_{sh}) p' + \text{const.} \quad (8.16)$$

Если отсчитывать p' от невозмущенного давления p_1 перед фронтом волны, то на эту величину нужно наложить граничные условия:

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow +\infty, \quad dp'/d\zeta = 0, \quad p' = 0, \\ \zeta \rightarrow -\infty, \quad dp'/d\zeta = 0, \quad p' = \Delta p = p_2 - p_1, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где p_2 — давление за фронтом. Подставляя (8.17) в (8.16), находим $\text{const} = 0$ и

$$u_{sh} = c_s + b\Delta p/2. \quad (8.18)$$

Далее записываем (8.16) для полного давления $p = p_1 + p'$.

$$dp/d\zeta = (b/2\chi)(p - p_1)(p - p_2)$$

и, интегрируя, получим

$$p(\zeta) = (p_1 + p_2)/2 - [(p_1 - p_2)/2] \text{th}(\zeta/\delta). \quad (8.19)$$

Начало отсчета выбрано таким образом, что точка $\zeta = 0$ соответствует половине ступеньки давления. Давление изменяется монотонно, толщина фронта

$$\delta = 4\chi/b\Delta p = 2\chi/(u_{sh} - c_s) \quad (8.20)$$

возрастает с уменьшением силы волны (которая измеряется скачком давления Δp или превышением скорости фронта над скоростью звука $u_{sh} - c_s$).

Коэффициент диффузии χ по порядку величины равен согласно (8.10) сумме $\eta_1 + \Delta$, где η_1 — кинематическая вязкость, Δ — коэффициент температуропроводности. Каждый из них порядка произведения тепловой скорости частиц (или скорости звука c_s) на транспортный пробег Λ . Таким образом, по порядку величины

$$\delta \approx \Lambda/(M - 1), \quad (8.21)$$

где $M = u_{sh}/c_s$ — число Маха. Экстраполируя формулу (8.21) на случай $M - 1 \gg 1$, мы видим, что у сильных ударных волн толщина фронта становится порядка длины транспортного пробега частиц. Это разумный результат, поскольку для преобразования энергии потока в тепловую энергию за фронтом волны требуется по крайней мере одно или несколько столкновений частиц. Следует, однако, иметь в виду, что последняя оценка сугубо приближенная: само понятие свободного пробега в толще фронта становится неопределенным ввиду резкого изменения температуры и концентрации частиц внутри фронта.

Выше мы не учитывали тот важный факт, что плазма состоит всегда из нескольких (не менее двух) компонент, причем $m_e/m_i \ll \ll 1$. Поэтому приведенные результаты фактически относятся к однокомпонентному газу. В плазме структура фронта волны усложняется ввиду медленного обмена между ионами и электронами. Пусть перед фронтом волны температуры электронов и ионов одинаковы: $T_e^{(1)} = T_i^{(1)}$. При переходе через фронт на толщине порядка среднего расстояния между ион-ионными столкновениями Λ_i температура ионов возрастает до $T_i^{(2)}$, поскольку почти вся энергия потока (при $M \gg 1$) принадлежит ионам и значительная часть ее перейдет в тепловую энергию. Но электроны на толщине ионного скачка температуры от $T_e^{(1)}$ до $T_e^{(2)}$ сохраняют прежнюю температуру $T_e^{(1)}$, так как в каждом столкновении электрон получает от иона лишь малую долю энергии порядка $(m_e/m_i) T_i^{(2)}$. За фронтом волны энергии электронов и ионов сравниваются лишь на длине $\Lambda_{ei} \approx \tau_{ei} v_{Te} \approx (m_i/m_e)^{1/2} \Lambda_i \gg \Lambda_i$. Таким образом, структура фронта будет определяться двумя длинами релаксации: ионным пробегом Λ_i и масштабом выравнивания электронной и ионной температур $(m_i/m_e)^{1/2} \Lambda_i$.

Фронт ударной волны становится еще более сложным, если на него влияют другие релаксационные процессы, например лучистый теплоперенос, который определяется длиной свободного пробега фотона Λ_r . Структуру ударных волн в плотной высокотемпературной плазме изучал Имшенник [83], в работе которого содержатся также и результаты численных расчетов.

8.3. Профиль перпендикулярной ударной волны

Структуру фронта чисто перпендикулярной ударной волны также можно исследовать на основе уравнения Бюргера. Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение МГД для поперечной волны:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \rho^{-1} \partial_x (p + B^2/8\pi) &= (4\eta_1/3 + \eta_2) \partial_x^2 u, \\ \partial_t B + u \partial_x B + B \partial_x u &= \eta \partial_x^2 B, \quad \partial_t s + u \partial_x s = (\kappa/\rho T) \partial_x^2 T. \end{aligned} \quad (8.22)$$

В правых частях отброшены члены, содержащие квадраты малых градиентов $(\partial_x u)^2$ и $(\partial_x B)^2$. После преобразований этой системы

с использованием уравнений (8.4)—(8.6) получим

$$\partial_t p + u \partial_x p + \rho (\partial_\rho p)_s \partial_x u = (\kappa/\rho) (c_V^{-1} - c_p^{-1}) \partial_x^2 p, \quad (8.23)$$

$$(\partial_t + u \partial_x)(B^2/8\pi) + (B^2/4\pi) \partial_x u = \eta \partial_x^2 (B^2/8\pi), \quad (8.24)$$

$$(\partial_t + u \partial_x) u + \rho^{-1} \partial_x (p + B^2/8\pi) = (4\eta_1/3 + \eta_2) \partial_x^2 u. \quad (8.25)$$

Складывая почленно равенства (8.23), (8.24) и введя обозначение

$$p_* = p + B^2/8\pi \quad (8.26)$$

для полного давления, получим

$$(\partial_t + u \partial_x) u + \rho^{-1} \partial_x p_* = (4\eta_1/3 + \eta_2) \partial_x^2 u, \quad (8.27)$$

$$(\partial_t + u \partial_x) p_* + \rho (\partial_\rho p_*)_s \partial_x u = (\kappa/\rho) (c_V^{-1} - c_p^{-1}) \partial_x^2 p_* + \eta \partial_x^2 (B^2/8\pi).$$

Здесь

$$\left(\frac{\partial p_*}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(p + \frac{b^2}{8\pi} \rho^2 \right)_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s + \frac{B^2}{4\pi \rho} = c_s^2 + c_A^2 = c_\perp^2, \quad (8.28)$$

где величина $b = B/\rho$ при постоянстве энтропии должна рассматриваться как постоянная (это следует из первого и третьего уравнений системы (8.22), если пренебречь диссипативным членом $\eta \partial_x^2 B$).

Далее используем для преобразования квадратичных членов линейное соотношение $u = p'_*/\rho c_\perp$ и приводим систему уравнений (8.27) к виду, похожему на (8.11):

$$\begin{aligned} \partial_t p'_* + c_\perp \partial_x p'_* + b_* p'_* \partial_x p'_* &= \\ &= 2^{-1} [4\eta_1/3 + \eta_2 + (\kappa/\rho) (c_V^{-1} - c_p^{-1})] \partial_x^2 p'_* + (\eta/2) \partial_x^2 (B^2/8\pi). \end{aligned} \quad (8.29)$$

Здесь p'_* — малая добавка к полному давлению; $b_* = (c_\perp^2/2V^2)(\partial_{p_*}^2 V)_s$. Чтобы выразить правую часть (8.29) через p'_* , преобразуем входящие в нее производные, используя постоянство энтропии и отбрасывая члены, квадратичные по градиентам $\partial_x p$ и $\partial_x p_*$. С помощью (8.26) и условия $b = B/\rho = \text{const}$ находим

$$\partial_x^2 p_* \approx (1 + c_A^2/c_s^2) \partial_x^2 p, \quad \partial_x^2 (B^2/8\pi) \approx (c_A^2/c_s^2) \partial_x^2 p, \quad (8.30)$$

что позволяет привести (8.29) к виду (8.11)

$$\partial_t p'_* + c_\perp \partial_x p'_* + b_* p'_* \partial_x p'_* = a_* c_\perp^3 \partial_x^2 p'_*. \quad (8.31)$$

Диссипативный коэффициент a_* несколько модифицируется по сравнению с (8.10):

$$a_* = 2^{-1} c_\perp^{-3} [4\eta_1/3 + \eta_2 + \eta c_A^2/c_\perp^2 + (\kappa/\rho) (c_V^{-1} - c_p^{-1}) c_s^2/c_\perp^2]. \quad (8.32)$$

Относительная роль джоулевой диссипации и теплопроводности зависит от соотношения между скоростью звука c_s и альвеновской скоростью c_A .

Профиль изменения полного давления в поперечной ударной МГД-волне слабой интенсивности и толщина ее фронта даются полученными выше формулами (8.19), (8.20) (с очевидным изменением обозначений).

8.4. Роль дисперсионных эффектов. Уравнение Кортевега—де Фриса—Бюргерса

Кроме нелинейности и диссипации, на распространение волн в плазме могут оказывать существенное влияние дисперсионные эффекты, т. е. зависимость фазовой скорости волн от волнового числа. Рассмотрим их роль на примере нелинейных волн в холдной замагниченной плазме, в которой $\beta_{e,i} = 8\pi n_{e,i} T_{e,i} / B^2 \ll \ll m_e / m_i$. Используем систему уравнений двухжидкостной МГД (см. разд. 1.1) в пренебрежении электронным и ионным давлениями и всеми диссипативными эффектами, за исключением трения между электронами и ионами:

$$m_i (\partial_t + \mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = e\mathbf{E} + (e/c) \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} + (m_e / \tau_e) (0,51 \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}), \quad (8.33)$$

$$m_e (\partial_t + \mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -e\mathbf{E} - (e/c) \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} - (m_e / \tau_e) (0,51 \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}), \quad (8.34)$$

$$\partial_t n_{i,e} + \nabla (n_{i,e} \mathbf{v}_{i,e}) = 0, \quad (8.35)$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = (4\pi e/c) (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e), \quad (8.36)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -c^{-1} \partial_t \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (8.37)$$

Здесь $e > 0$ — заряд иона; τ_e — время электронной релаксации [19],

$$\tau_e = 3m_e^{1/2} T_e^{3/2} / 4 (2\pi)^{1/2} \lambda e^4 n_i; \quad (8.38)$$

λ — кулоновский логарифм; $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e$.

Для процессов, частоты которых удовлетворяют условию $\omega \ll \ll \omega_{pi}$, можно пренебречь разделением зарядов и считать $n_e = = n_i = n$. Преобразуем систему (8.33)—(8.37), введя массовую скорость

$$\mathbf{u} = (m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e) / (m_i + m_e) \approx \mathbf{v}_i + (m_e / m_i) \mathbf{v}_e. \quad (8.39)$$

Складывая уравнения (8.33), (8.34) почленно и пренебрегая членами порядка m_e / m_i , получим

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = (4\pi m_i)^{-1} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad (8.40)$$

где было использовано также уравнение (8.36). Далее поделим (8.33) на m_i , (8.34) — на m_e и сложим указанные уравнения, использовав приближенные равенства

$$\mathbf{v}_i / m_i + \mathbf{v}_e / m_e \approx (\mathbf{u} - \mathbf{j} / en) / m_e, \quad \mathbf{v}_e \approx \mathbf{u} - \mathbf{j} / en;$$

здесь $\mathbf{j} = en(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e)$ — плотность тока. В результате получим обобщенный закон Ома

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{u}/c) \times \mathbf{B} + (enc)^{-1} \mathbf{j} \times \mathbf{B} + (m_e/e^2\tau_e n)(0,51\mathbf{j}_{\parallel} + \mathbf{j}_{\perp}) + \\ + (m_e/e^2) \{\partial_t(\mathbf{j}/n) + (\mathbf{u}\nabla)(\mathbf{j}/n) + n^{-1}(\mathbf{j}\nabla)\mathbf{u} - (en)^{-1}(\mathbf{j}\nabla)(\mathbf{j}/n)\}, \quad (8.41)$$

где $e^2n\tau_e/m_e = \sigma$ — электропроводность плазмы вдоль магнитного поля. С помощью (8.36), (8.37) и (8.41) получаем уравнение для индукции магнитного поля

$$\partial_t \mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \text{rot} \eta(0,51 \text{rot}_{\parallel} \mathbf{B} + \text{rot}_{\perp} \mathbf{B}) - \\ - \text{rot}(4\pi en)^{-1}(\text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}) - (m_e c/e^2) \{\partial_t(\mathbf{j}/n) + \\ + (\mathbf{u}\nabla)(\mathbf{j}/n) + n^{-1}(\mathbf{j}\nabla)\mathbf{u} - (en)^{-1}(\mathbf{j}\nabla)(\mathbf{j}/n)\}, \quad (8.42)$$

где $\eta = c^2/4\pi\sigma$ — магнитная вязкость и в фигурных скобках следует подставить $\mathbf{j} = (c/4\pi) \text{rot} \mathbf{B}$. Уравнения (8.40), (8.42) и уравнение неразрывности

$$\partial_t n + \nabla(n\mathbf{u}) = 0 \quad (8.43)$$

образуют полную систему уравнений, описывающих движение плазмы в рассматриваемом приближении.

Для того чтобы исследовать слабонелинейные движения в плазме с учетом дисперсии и диссипации, рассмотрим сначала линеаризованную систему уравнений. Предполагая, что $\mathbf{b} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0$ и \mathbf{u} — малые добавки, пропорциональные $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, и выбрав ось x вдоль \mathbf{k} , а \mathbf{B}_0 лежащим в плоскости xz , получим после исключения \mathbf{u} систему алгебраических уравнений для b_y, b_z :

$$b_y[(\mathbf{k}c_A)^2 - i\eta k^2\omega - \omega^2(1 + c^2k^2/\omega_{pe}^2)] - \\ - b_z(ick\omega/\omega_{pi})(\mathbf{k}c_A) = 0, \quad (8.44)$$

$$b_y(ick\omega/\omega_{pi})(\mathbf{k}c_A) + b_z[c_A^2 k^2 - i\eta k^2\omega - \omega^2(1 + c^2k^2/\omega_{pe}^2)] = 0. \quad (8.45)$$

При $\omega_{pi}, \omega_{pe} \rightarrow \infty$ и $\eta \rightarrow 0$ получаем законы дисперсии $\omega = c_A k \cos \alpha$ и $\omega = c_A k$ для альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн соответственно. В дальнейшем рассмотрим только нелинейное обобщение быстрой магнитозвуковой волны. В приближении

$$ck \ll \omega_{pi}, \quad \eta k^2 \ll \omega, \quad \alpha \gg ck/\omega_{pi} \quad (8.46)$$

находим для нее закон дисперсии

$$\omega(k) = c_A k - \mu k^3 - i\eta k^2/2, \quad \mu = c_A(c^2/2\omega_{pi}^2)(m_e/m_i - \text{ctg}^2\alpha), \quad (8.47)$$

где слагаемые $\mu k^3, \eta k^2$ являются малыми поправками. Последние условия требуют, чтобы масштабы движения были достаточно велики ($ck \ll \omega_{pi}, \eta k \ll c_A$), и исключают продольное распространение ($\alpha \gg ck/\omega_{pi}$).

Получим теперь замкнутое уравнение для компоненты магнитного поля b_z^2 , которое бы учитывало нелинейную поправку и малую диссипацию. Умножив (8.47) на b_z , запишем полученное алгебраическое уравнение в виде:

$$[-i\omega + c_A ik + \mu (ik)^3] b_z = (\eta/2)(ik)^2 b_z;$$

после перехода к координатно-временному представлению будем иметь

$$\partial_t b_z + c_A \partial_x b_z + \mu \partial_x^3 b_z = (\eta/2) \partial_x^2 b_z. \quad (8.48)$$

Это уравнение, однако, не содержит нелинейности. Чтобы учесть нелинейные члены низшего порядка, отвечающие квадратичной нелинейности, используем уравнение (8.42) в проекции на ось z :

$$\partial_t b_z = e_z \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{b}) + \eta \Delta b_z - (4\pi n)^{-1} e_z \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{b} \times \mathbf{V}_0) - (c^2/\omega_{pe}) \partial_t (e_z \operatorname{rot} \mathbf{b}). \quad (8.49)$$

При записи (8.49) учтено, что нелинейность, дисперсию и диссипацию мы рассматриваем как три малых аддитивных эффекта, поэтому нелинейные слагаемые в дисперсионных и диссипативных членах отброшены. Нетрудно проверить, что если исключить \mathbf{u} из (8.49) с помощью (8.40), сохранив лишь линейные члены, и использовать связь между производными по координате и времени, вытекающую из дисперсионного уравнения (8.47), то получится уравнение (8.48). Для включения в уравнение нелинейных поправок следует сохранить в (8.49) члены с квадратичной нелинейностью вида $\operatorname{rot}(\mathbf{u}^{(1)} \times \mathbf{b} + \mathbf{u}^{(2)} \times \mathbf{V}_0)$, где $\mathbf{u}^{(1)}$ и $\mathbf{u}^{(2)}$ пропорциональны b_z и b_z^2 соответственно.

Обращаясь к уравнению (8.40), запишем его с точностью до членов II порядка в виде

$$\partial_t \mathbf{u}^{(1)} + \partial_t \mathbf{u}^{(2)} = (4\pi n m_i)^{-1} [(\mathbf{e}_x \times \partial_x \mathbf{b}) \times \mathbf{V}_0 + (\mathbf{e}_x \times \partial_x \mathbf{b}) \times \mathbf{b}] - u_x^{(1)} \partial_x \mathbf{u}^{(1)}.$$

Заменив $\partial_t \rightarrow -c_A \partial_x$, находим

$$\mathbf{u}^{(1)} = - (4\pi n m_i)^{-1/2} (\mathbf{e}_x \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}_0,$$

где $\mathbf{b}_0 = \mathbf{V}_0/B_0$. При вычислении $\mathbf{u}^{(2)}$ отбрасываем малую компоненту b_y :

$$\mathbf{u}^{(2)} = (4\pi n m_i)^{-1/2} [\mathbf{e}_x (1 + \sin^2 \alpha) - \mathbf{e}_z \sin \alpha \cos \alpha] (b_z^2/2B_0).$$

Вычислив $\operatorname{rot}(\mathbf{u}^{(1)} \times \mathbf{b} + \mathbf{u}^{(2)} \times \mathbf{V}_0)$ и добавив в правую часть (8.49), получим вместо (8.48) нелинейное уравнение

$$\partial_t b_z + c_A (1 + 4 \sin \alpha b_z/B_0) \partial_x b_z + \mu \partial_x^3 b_z = \chi \partial_x^2 b_z, \quad (8.50)$$

² Заметим, что $b_x = 0$ в силу условия $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0$, а $b_y \ll b_z$ в магнитозвуковой волне в меру малости дисперсионной поправки согласно (8.44). Поэтому b_z представляет собой основную компоненту магнитного поля волны.

где мы для простоты ввели обозначение $\chi = \eta/2$. Уравнение упрощается путем введения новой независимой переменной $\xi = x - c_A t$ и новой неизвестной функции $u(\xi, t) = 4c_A \sin \alpha b_z(\xi, t)/B_0$:

$$\partial_t u + u \partial_\xi u + \mu \partial_\xi^3 u = \chi \partial_\xi^2 u. \quad (8.51)$$

В отсутствие дисперсионного эффекта ($\mu = 0$) это уравнение превращается в уравнение Бюргерса (8.12). Если же отсутствует диссипация ($\chi = 0$), то будем иметь уравнение Кортевега-де Фриса (КдФ)

$$\partial_t u + u \partial_\xi u + \mu \partial_\xi^3 u = 0. \quad (8.52)$$

Оно было получено впервые [285] еще в 1895 г. для гравитационных волн в жидкости, находящейся в канале конечной глубины. В последние десятилетия, однако, выяснилось, что область применения уравнения КдФ значительно шире: кроме волн в жидкости, оно описывает нелинейные волны в плазме в весьма разнообразных условиях, волны в ангармонической кристаллической решетке, имеет ряд других приложений, в том числе в квантовой теории поля. Математическую теорию уравнения КдФ и его многочисленные приложения можно найти в обзорах и монографиях [1, 71, 77, 88, 95, 117, 130, 134, 136, 153, 154, 158].

8.5. Нелинейные периодические волны и солитоны в холодной плазме

Рассмотрим на основе уравнения КдФ некоторые типы нелинейных волн в холодной плазме в пренебрежении диссипацией. Ограничимся стационарными волнами, т. е. такими возмущениями, которые зависят от координаты и времени в комбинации $x - u_w t$, где $u_w = \text{const}$ — скорость волны. Такие волны, как следует из их определения, не изменяют своей формы при распространении и поэтому являются частными типами нелинейных возмущений. Само по себе их существование обязано одновременному действию двух эффектов: нелинейности, приводящей к непрерывной деформации фронта и «прокидыванию» (см. разд. 2.1), и дисперсий, вызывающей распывание волнового пакета. Взаимное уравновешивание двух противоположных тенденций приводит к образованию стационарных структур.

Для математического анализа стационарных нелинейных волн в отсутствие диссипации обратимся к уравнению (8.50), положим в нем $\chi = 0$ и введем обозначение $h(x, t) = 4c_A \sin \alpha b_z(x, t)/B_0$:

$$\partial_t h + c_A \partial_x h + h \partial_x h + \mu \partial_x^3 h = 0. \quad (8.53)$$

Ищем решение в виде $h(x - u_w t)$, где u_w — неизвестная постоянная скорость распространения волны. Вводя обозначение $\xi = x - u_w t$, приводим (8.53) к виду

$$(-\Delta u h + h^2/2 + \mu h''')' = 0, \quad \Delta u = u_w - c_A, \quad (8.54)$$

где штрих обозначает производную по ξ . Интегрируя (8.54), получаем уравнение, формально совпадающее с уравнением классической механики:

$$\mu h'' = K + \Delta u h - h^2/2 = -\partial W/\partial h, \quad (8.55)$$

где K — постоянная интегрирования;

$$W(h) = h^3/6 - \Delta u h^2/2 - Kh \quad (8.56)$$

— «потенциальная энергия» частицы, зависящая от ее «обобщенной координаты» h . Роль времени играет ξ . Постоянную K нетрудно обратить в нуль заменой $h \rightarrow h + h_0$; такая замена, как следует из (8.53), означает переход в систему отсчета, движущуюся со скоростью $c_A h_0$. В дальнейшем считаем $K = 0$.

Основываясь на механической аналогии, нетрудно провести интегрирование до конца. С помощью интеграла «энергии» $\mu h'^2/2 + W(h) = E = \text{const}$ записываем решение (8.55) в квадратурах

$$\int [P(h)]^{-1/2} dh = \pm \xi / (3\mu)^{1/2}, \quad (8.57)$$

где

$$P(h) = 6E + 3\Delta u h^2 - h^3 \quad (8.58)$$

— кубический полином. Решение (8.57) будет иметь физический смысл только при $P(h) \geq 0$ и h — ограниченном (а чтобы оно было применимо для описания нелинейных волн в холодной плазме, необходимо $|h| \ll c_A$). Постоянную интегрирования, определяемую начальным отсчетом координаты ξ , мы в (8.57) опустим. Решение записано для $\mu > 0$, что согласно (8.47) соответствует отрицательной поправке к линейному закону дисперсии.

Рассмотрим сначала случай, когда интеграл (8.57) берется в элементарных функциях. Это имеет место при $E = 0$. Если $h \geq 0$, то условие $P(h) = h^2(3\Delta u - h) \geq 0$ требует, чтобы было $\Delta u > 0$ и $0 \leq h \leq 3\Delta u$. В этом случае

$$\int [P(h)]^{-1/2} dh = -(3\Delta u)^{-1/2} \ln \{ [(3\Delta u)^{1/2} - (3\Delta u - h)^{1/2}] / [(3\Delta u)^{1/2} + (3\Delta u + h)^{1/2}] \}$$

и решение принимает вид

$$h(x, t) = 3\Delta u \operatorname{ch}^{-2} [(\Delta u/4\mu)^{1/2}(x - u_w t)]. \quad (8.59)$$

Это решение соответствует уединенной волне — солитону. Он представляет собой в данном случае горб магнитного поля, возвышающийся над окружающим фоном на величину $b_z = B_z - B_0 = B_0 h/4c_A \sin \alpha$ и распространяющийся со скоростью $u_w = c_A + \Delta u$. С возмущением магнитного поля связаны возмущения скорости плазмы и ее плотности, как это следует из формул разд. 8.4. Величина Δu — превышение скорости солитона над скоростью c_A линейной магнитозвуковой волны — связана с амплитудой h_0 соотношением

$$h_0 = 3\Delta u. \quad (8.60)$$

Ширина солитона

$$\delta = 2(\mu/\Delta u)^{1/2} = 2(3\mu/h_0)^{1/2} \quad (8.61)$$

обратно пропорциональна корню квадратному из его амплитуды. Для солитона, распространяющегося поперек магнитного поля ($\alpha = \pi/2$), имеем $\delta = (c/\omega_{pe})(3B_0/2b_0)^{1/2}$, где b_0 — высота магнитного горба, а параметр $a_D = c/\omega_{pe}$ определяет характерную длину дисперсии.

При $h < 0$ условие $P(h) \geq 0$ выполняется для $h \leq -3\Delta u$. В этом случае

$$\int [P(h)]^{-1/2} dh = -2(3\Delta u)^{-1/2} \arctg(|h|/3\Delta u)^{1/2}$$

и решение принимает вид

$$h(x, t) = -3\Delta u \operatorname{tg}^2 [(\Delta u/4\mu)^{1/2} (x - u_w t)]. \quad (8.62)$$

Это решение не удовлетворяет условию ограниченности и поэтому физически нереализуемо.

Теперь построим солитон для положительной дисперсионной поправки ($\mu < 0$). Возвращаясь к уравнению (8.53), выполним замену

$$\mu = -|\mu|, \quad h = -\bar{h}; \quad -\partial_t \bar{h} - c_A \partial_x \bar{h} + \bar{h} \partial_x \bar{h} + |\mu| \partial_x^3 \bar{h} = 0.$$

Снова ищем решение в виде $\bar{h}(x - u_w t)$ и получаем в точности уравнение (8.54)

$$(-\Delta u \bar{h} + \bar{h}^2/2 + |\mu| \bar{h}''')' = 0,$$

где теперь $\Delta u = c_A - u_w$. Задача сведена к предыдущему случаю $\mu > 0$, солитон описывается функцией

$$h(x, t) = -3\Delta u \operatorname{ch}^{-2} [(\Delta u/4|\mu|)^{1/2} (x - u_w t)], \quad (8.63)$$

где $\Delta u > 0$, $h \leq 0$. Солитон представляет собой магнитную яму (солитон разрежения) и является «медленным» — его скорость $u_w = c_A - \Delta u$ меньше скорости магнитозвуковой волны малой амплитуды.

Обратимся теперь к случаю $E \neq 0$ и используем отмеченную выше аналогию с движением классической частицы в поле $W(h)$ [88, 149]. Потенциальная энергия имеет график, изображенный на рис. 8.1. При $h > 0$ и $0 \geq E \geq W_{\min} = -2\Delta u^3/3$ частица в потенциальной яме совершает нелинейные колебания, при этом ее «координата» h изменяется в пределах от h_1 до h_2 , определяемых точками пересечения горизонтальной прямой $E = \text{const}$ с границами ямы. Солитону отвечает $E = 0$ и изменение h в пределах от $3\Delta u$ до 0 в соответствии с формулой (8.59). При $h < 0$ движение частицы инфинитно, что соответствует неограниченному росту h (см. (8.62)). Этот случай не описывает какой-либо реальной волны. При E , близком к W_{\min} , колебания происходят около значения $h = 2\Delta u$ с малой амплитудой и носят синусоидальный характер.

Эту качественную картину можно обосновать расчетом. Представим $P(h)$ в виде

$$P(h) = (h_1 - h)(h - h_2)(h - h_3),$$

где $h_1 \geq h_2 \geq h_3$ — корни кубического уравнения $P(h) = 0$. При $h_1 \geq h \geq h_2$, вычисляя интеграл (8.57), получим [65]

$$\pm \xi (3\mu)^{-1/2} = 2 (h_1 - h_3)^{-1/2} F(\lambda, p), \quad (8.64)$$

где

$$\lambda = \arcsin [(h_1 - h)/(h_1 - h_2)]^{1/2}, \quad p = [(h_1 - h_2)/(h_1 - h_3)]^{1/2}.$$

Разрешая (8.64) относительно h , будем иметь

$$h(x, t) = h_1 - (h_1 - h_2) \operatorname{sn}^2(u, p), \quad (8.65)$$

где $u = [(h_1 - h_3)/12\mu]^{1/2}(x - u_0 t)$, а $\operatorname{sn}(u, p)$ — функция Якоби [172]. При u и p — действительных функция sn имеет период по u , равный $4K(p)$, где $K(p)$ — полный эллиптический интеграл I рода. Решение (8.65) описывает так называемую *кноидальную волну*.

В частном случае $E \rightarrow 0$ имеем $h_1 \rightarrow 3\Delta u$, $h_2 \rightarrow h_3 \rightarrow 0$. При этом $p \rightarrow 1$, а $\operatorname{sn}(u, p) \rightarrow \operatorname{th} u$. Таким образом, мы снова имеем

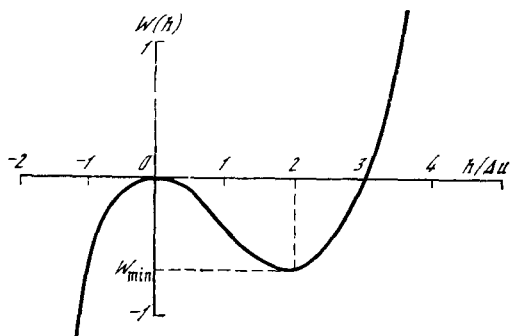


Рис. 8.1. Эффективная потенциальная энергия нелинейного осциллятора для уравнения КдФ

солитон (8.59). При малых E ($E/W_{\min} \ll 1$) кноидальная волна представляет собой бесконечную цепочку солитонов, разделенных расстоянием $L \approx \delta \ln(864W_{\min}/E) \gg \delta$, где δ — ширина солитона (8.61). При $1 - E/W_{\min} \ll 1$ получаем $h_1 \approx 2\Delta u$, $h_1 - h_2 \approx 2[(E - W_{\min})/\Delta u]^{1/2}$, $p \ll 1$, а $\operatorname{sn}(u, p) \approx \sin u$; решение (8.65) принимает вид

$$h(x, t) = 2\Delta u + [(E - W_{\min})/\Delta u]^{1/2} \cos [((h_1 - h_3)/3\mu)^{1/2}(x - u_0 t)]. \quad (8.66)$$

Как выяснилось в последние два десятилетия, солитоны играют значительную роль в физике нелинейных волновых явлений. Их роль определяется следующими двумя обстоятельствами: а) при взаимодействии солитоны во многих случаях сохраняют асимптотически свою форму и скорость, т. е. ведут себя как час-

тицы [153]; б) произвольное нелинейное начальное возмущение при определенных условиях эволюционирует в некоторую совокупность солитонов (и волновые «хвосты»; см. [77, 88]). Это дает основание рассматривать солитонные решения как своего рода «собственные функции» нелинейного уравнения, через которые можно выражать его решения более общего характера (см. подробнее в следующей главе).

8.6. Осцилляционная структура диссипативной ударной волны

Здесь мы исследуем влияние дисперсионных эффектов на структуру ударной волны, пользуясь уравнением КдФ—Бюргерса (8.50). Мы увидим, что монотонный профиль ударной волны (8.19) за счет дисперсии сменяется осцилляционной структурой, которая в зависимости от знака дисперсии появляется за ударным фронтом или впереди него.

Записав уравнение (8.50) через переменную $h(x - u_{sh}t)$, введенную в разд. 8.5, приведем его к виду

$$\mu h'' - \chi h' = -\partial W/\partial h = \Delta u h - h^2/2, \quad (8.67)$$

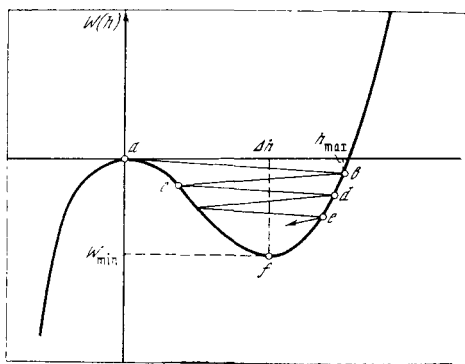
отличающемуся от (8.55) наличием диссипативного члена $-\chi h'$. В эффективной потенциальной энергии (8.56) $\Delta u = u_{sh} - c_A > 0$, постоянная интегрирования $K = 0$, если потребовать, чтобы асимптотически перед фронтом $h \rightarrow 0$, а за фронтом $h \rightarrow \Delta h = \text{const}$. Параметр Δh определяет силу ударной волны. Штрихами в (8.67) обозначено дифференцирование по переменной $\xi = x - u_{sh}t$. Устремив в (8.67) $\xi \rightarrow -\infty$ (область за фронтом), найдем связь между параметрами Δu и Δh :

$$\Delta h = 2\Delta u. \quad (8.68)$$

Качественную картину поведения h можно составить, пользуясь указанной выше механической аналогией с колебаниями частицы в потенциальной яме. В отличие от предыдущего раздела здесь колебания происходят с трением (рис. 8.2). Пусть $\mu > 0$. Осциллятор стартует из состояния a при $\xi \rightarrow +\infty$ (асимптотика $h = 0$ перед фронтом волны). С ростом t (что соответствует уменьшению ξ) осциллятор переходит в состояние b (вершина первого максимума магнитного поля, весьма сходного с солитоном, если диссипация невелика). Далее происходит еще бесконечное число осцилляций (состояния c, d и т. д.), сопровождающихся уменьшением амплитуды, пока асимптотически при $\xi \rightarrow -\infty$ осциллятор не переходит в состояние f , отвечающее постоянному значению $h = \Delta h$ за фронтом волны. Осцилляционный режим легко исследовать при малых амплитудах путем линеаризации уравнения (8.67). Линеаризуя указанное уравнение и записывая его решение в виде

$$h_{1,2}(\xi) = a_{1,2} \exp(k_{1,2}\xi),$$

Рис. 8.2. Нелинейный осциллятор с трением для уравнения КдФ—Бюргерса



получим перед фронтом (область 1)

$$k_1 = -(\chi/2\mu)[(1 + 4\mu\Delta u/\chi^2)^{1/2} - 1], \quad (8.69)$$

что соответствует аperiodическому режиму изменения h от 0 до некоторого h_{\max} . За фронтом (область 2) будем иметь

$$k_2 = \chi/2\mu \pm i(\chi/2\mu)(4\mu\Delta u/\chi^2 - 1)^{1/2}. \quad (8.70)$$

Режим оказывается колебательным, если

$$\chi < (4\mu\Delta u)^{1/2} = (2\mu\Delta h)^{1/2}. \quad (8.71)$$

Амплитуды $a_{1,2}$ могут быть найдены только из решения нелинейной задачи.

При $\mu < 0$ (положительная дисперсия) картина меняется на противоположную: перед фронтом — колебания при выполнении условия (8.71), причем

$$k_1 = -\chi/2|\mu| \pm i(\chi/2|\mu|)(4|\mu|\Delta u/\chi^2 - 1)^{1/2}; \quad (8.72)$$

за фронтом — плавный выход на асимптотику $h_2 = \Delta h$,

$$k_2 = (\chi/2|\mu|)[(1 + 4|\mu|\Delta u/\chi^2)^{1/2} - 1]. \quad (8.73)$$

Ширина ударного фронта определяется расстоянием, на кото-

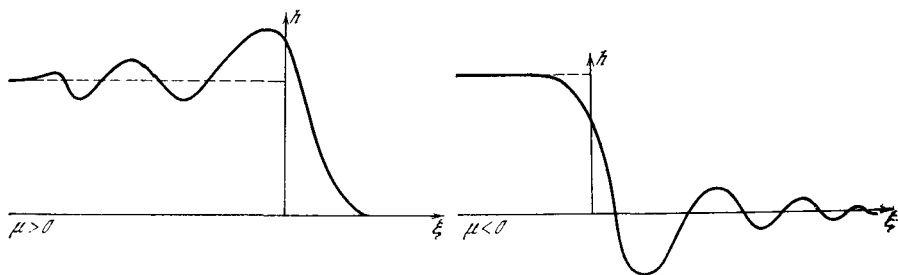


Рис. 8.3. Осцилляционная структура ударной волны при отрицательной ($\mu > 0$) и положительной ($\mu < 0$) дисперсии

ром затухают осцилляции:

$$\delta = 2 \left(\frac{1}{|\operatorname{Re} k_1|} + \frac{1}{|\operatorname{Re} k_2|} \right) = \frac{4|\mu|(1+4|\mu|\Delta u/\chi^2)^{1/2}}{\chi[(1+4|\mu|\Delta u/\chi^2)^{1/2}-1]}. \quad (8.74)$$

Эта формула применима при любом знаке дисперсии, $\mu \leq 0$. При $\mu \rightarrow 0$ получаем согласие с (8.20), а в обратном предельном случае ширина фронта не зависит от силы ударной волны:

$$\delta = 4|\mu|/\chi, \quad \chi \ll (4|\mu|\Delta u)^{1/2}. \quad (8.75)$$

Схематически осцилляционная структура фронта ударной волны изображена на рис. 8.3. Аналитическое решение уравнения КдФ—Бюргера при малом затухании, но без линеаризации было получено в работе [69].

8.7. Нелинейные волны в горячей плазме. Нелинейное уравнение Шрёдингера

В бесстолкновительной горячей плазме с $c_s \approx c_A$ линейные и нелинейные волны малой амплитуды подвергаются сильному затуханию Ландау вследствие черенковского резонанса с ионами. Исключение составляют только волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля или под прямым углом к нему (см. разд. 2.4). Поэтому мы начнем с рассмотрения нелинейных волн, бегущих вдоль магнитного поля.

Общая схема рассмотрения будет такой же, как в разд. 8.4. Запишем систему уравнений, аналогичную (8.40), (8.42), (8.43), но для горячей плазмы:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\rho^{-1} \nabla p + (4\pi\rho)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}, \quad (8.76)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \operatorname{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \operatorname{rot} (c/en) \nabla p_e - c \operatorname{rot} (4\pi en)^{-1} (\operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B}), \quad (8.77)$$

$$\partial_t n + \operatorname{div} (n\mathbf{u}) = 0. \quad (8.78)$$

Здесь опущены все диссипативные слагаемые, а также дисперсионные члены, содержащие массу электрона m_e , но включены члены с давлением $p = p_e + p_i$.

Далее линеаризуем систему уравнений (8.76)—(8.78) и найдем дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$. Полагаем $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}(x, t)$, $n = n_0 + n'(x, t)$ и ищем решение вида $b \sim \exp(ikx - i\omega t)$ и т. д., где волновой вектор \mathbf{k} и поле \mathbf{B}_0 направлены вдоль оси x . Обозначая $b_{\pm} = b_y \pm ib_z$, находим для двух круговых поляризованных волн два разных закона дисперсии:

$$\omega_{\pm} = c_A k (1 \mp kr_A/2), \quad (8.79)$$

где $r_A = c_A/\omega_B$ и дисперсионная поправка считается малой по сравнению с единицей. Для частот ω_{\pm} выбраны положительные знаки.

Запишем систему уравнений (8.76)—(8.78) для волн, распространяющихся вдоль \mathbf{B}_0 , сохранив нелинейность всюду, кроме

малого дисперсионного члена:

$$\partial_t u_x + u_x \partial_x u_x = -\rho^{-1} \partial_x p - (8\pi\rho)^{-1} \partial_x b^2, \quad (8.80)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_\perp + u_x \partial_x \mathbf{u}_\perp = (4\pi\rho)^{-1} B_0 \partial_x \mathbf{b}, \quad (8.81)$$

$$\partial_t \mathbf{b} = B_0 \partial_x \mathbf{u}_\perp - \partial_x (u_x \mathbf{b}) - (c^2 \omega_{B_i} / \omega_{pi}^2) \mathbf{e}_x \times \partial_x^2 \mathbf{b}, \quad (8.82)$$

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u_x) = 0. \quad (8.83)$$

Для волн, которые в линейном приближении обладают законом дисперсии (8.79), величины u_x и $\rho' = \rho - \rho_0$ являются малыми нелинейными поправками порядка b^2 . Вычислим их приближенно из системы двух уравнений (8.80), (8.83). Мы будем рассматривать эту систему как неоднородную с правой частью $-(8\pi\rho)^{-1} \partial_x b^2$ и искать ее частное решение, пропорциональное b^2 . Положим $\rho^{-1} \partial_x p = \rho_0^{-1} c_s^2 \partial_x \rho'$, $\partial_t = -c_A \partial_x$ и запишем уравнения (8.80), (8.83) с точностью до линейных членов в левых частях:

$$\partial_x (-c_A u_x + \rho_0^{-1} c_s^2 \rho') = -(8\pi\rho_0)^{-1} \partial_x b^2, \quad \partial_x (\rho_0 u_x - c_A \rho') = 0. \quad (8.84)$$

Из этой системы легко находим

$$u_x = b^2 [8\pi\rho_0 c_A (1 - \beta)]^{-1}, \quad \rho' = b^2 [8\pi c_A^2 (1 - \beta)]^{-1}, \quad (8.85)$$

где $\beta = c_s^2 / c_A^2$.

Решение (8.85) имеет силу только при $|1 - \beta| \gg 1$. При близких значениях c_s и c_A , т. е. при $\beta \rightarrow 1$, величины u_x и ρ' возрастают неограниченно, что связано с учетом лишь линейных членов в левых частях системы (8.84). Для устранения особенности при $\beta = 1$ необходимо учесть квадратичные и дисперсионные члены. Исключая из рассмотрения узкую область параметров $|1 - \beta| \ll 1$, используем в дальнейшем формулы (8.85).

Выразим теперь из (8.81) скорость \mathbf{u}_\perp через \mathbf{b} , с тем чтобы получить замкнутое уравнение для \mathbf{b} . Пользуясь дисперсионными соотношениями (8.79), находим

$$\mathbf{u}_\perp = -\mathbf{b} (4\pi\rho_0)^{-1/2} \pm i r_A (16\pi\rho_0)^{-1/2} \partial_x \mathbf{b}. \quad (8.86)$$

Нелинейные члены взаимно сократились. Подставив в (8.82) u_x из (8.85) и \mathbf{h}_\perp из (8.86), приведем получившееся уравнение к виду нелинейного уравнения Шрёдингера с производной от кубического нелинейного члена:

$$\partial_\tau h + i \partial_\xi^2 h + \partial_\xi (|h|^2 h) = 0. \quad (8.87)$$

Здесь $\tau = \omega_{B_i} t / 2$, $\xi = x / r_A - \omega_{B_i} t$; $h = b_\perp / B_0 (1 - \beta)^{1/2}$.

Методы интегрирования нелинейного уравнения Шрёдингера и некоторые его решения будут рассмотрены в разд. 8.7 и 9.1.

Обратимся теперь к случаю поперечного (относительно \mathbf{V}_0) распространения слабонелинейных волн. Эволюционное уравнение при такой геометрии для низкочастотных движений ($\omega \ll \omega_{B_i}$) можно было бы, как и в предыдущих случаях, вывести на основе

МГД-уравнений. Однако для корректного учета дисперсионных эффектов необходимо включить в эти уравнения поправки к тензору напряжений (помимо обычного члена ∇p) и учесть поток энергии [121]. Ввиду громоздкости такой процедуры, а также для разнообразия используем кинетический метод построения эволюционного уравнения.

Выбрав, как и раньше, ось x в направлении распространения волны и ось z вдоль \mathbf{B}_0 , запишем уравнения Максвелла:

$$\partial_x b = - (4\pi/c) j_y, \quad j_x = 0, \quad \partial_z b = - c \partial_x E_y, \quad (8.88)$$

где $\mathbf{b} = b e_z$ — магнитное поле волны; E_x и E_y — компоненты ее электрического вектора. На первом этапе выводим дисперсионное уравнение для плоских монохроматических линейных волн, для чего необходимо вычислить плотность тока

$$j_y = e \int v_y (f^{(i)} - f^{(e)}) d^3 p, \quad (8.89)$$

взяв функции распределения $f^{(i)}$, $f^{(e)}$ в линейном по полю волны приближении.

Нам потребуется также квадратичная поправка к току. Запишем $f^{(i)} = f_0^{(i)} + f_1^{(i)} + f_2^{(i)}$ и аналогично для электронов и будем искать поправки f_1 , f_2 из кинетического уравнения, приняв в качестве f_0 распределение Максвелла. Получим систему уравнений

$$\partial_t f_n^{(i)} + v_x \partial_x f_n^{(i)} - \omega_{B_i} \hat{\mathbf{O}} f_n^{(i)} = Q_n(x, t, \varphi), \quad (8.90)$$

где $n = 1, 2$; $\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{p} \times (\partial/\partial \mathbf{p})$; φ — угол вращения частицы вокруг \mathbf{B}_0 ;

$$Q_1 = - \left(\frac{e \mathbf{E} \mathbf{p}}{p} \right) \partial_p f_0^{(i)}, \quad Q_2 = - e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{b} \right) \frac{\partial f_1^{(i)}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (8.91)$$

Преобразование

$$f_n^{(i)} = \exp(\omega_{B_i} \mathbf{O} t) u_n(x, t, \varphi) \quad (8.92)$$

приводит к уравнению для u_n вида

$$\partial_t u_n + v_x(t) \partial_x u_n = Q_n(x, t, \varphi - \omega_{B_i} t),$$

где $v_x(t) = v_{\perp} \cos(\varphi - \omega_{B_i} t)$. Уравнение легко интегрируется:

$$u_n(x, t, \varphi) = \int_{-\infty}^t Q_n \left(x - \int_{\tau}^t v_x(\tau') d\tau', \tau, \varphi - \omega_{B_i} \tau \right) d\tau. \quad (8.93)$$

Пользуясь снова формулой (8.92) и выполнив замену переменной интегрирования, получим окончательно

$$f_n^{(i)}(x, t, \varphi) = \int_0^{\infty} Q_n \left(x + \frac{v_{\perp}}{\omega_{B_i}} \sin \varphi - \frac{v_{\perp}}{\omega_{B_i}} \sin(\varphi + \omega_{B_i} \tau), t - \tau, \varphi + \omega_{B_i} \tau \right) d\tau. \quad (8.94)$$

В формулах (8.93), (8.94) предполагается адиабатическое включение поля волны при $t \rightarrow -\infty$.

Дальнейшие вычисления можно проводить двояким путем. Для получения линейных дисперсионных поправок следует выбрать \mathbf{E} , \mathbf{b} в виде плоских монохроматических волн, т. е. \mathbf{E} , $\mathbf{b} \sim \exp(ikx - i\omega t)$, и провести в интеграле (8.94) разложение по малым параметрам ω/ω_{B_i} и $kr_{i,e}$, где $r_{i,e} = v_{T_{i,e}}/\omega_{B_{i,e}}$ — ларморовы радиусы частиц. Вычислив в нужном приближении $f_1^{(i)}$ и $f_1^{(e)}$, получим с помощью (8.89) плотность тока

$$j_y^i = -\frac{i\omega}{4\pi} \left\{ \frac{c^2}{c_A^2} \left(1 + \frac{1}{4} k^2 r_i^2 \right) - \left(\frac{ck}{\omega} \right)^2 \left(\beta - \frac{3}{8} \beta_i k^2 r_i^2 \right) \right\} E_y, \quad (8.95)$$

где $\beta_{i,e} = 8\pi n_0 T_{i,e} / B_0^2$; $\beta = \beta_i + \beta_e$; $c^2 \gg c_A^2$, а компонента E_x выражена через E_y с помощью условия $j_x = 0$. Переход к фурье-представлению в системе уравнений (8.88) и подстановка в нее тока (8.95) позволяют получить уравнение дисперсии вида

$$\omega(k) = c_{\perp} k (1 - k^2 a_D^2). \quad (8.96)$$

Здесь

$$c_{\perp} = c_A (1 + \beta)^{1/2}, \quad (8.97)$$

— скорость поперечного звука (ср. с (2.41)),

$$a_D = (r_i/2)[1/2 + 3\beta_i/4 (1 + \beta)]^{1/2} \quad (8.98)$$

— дисперсионная длина. Обратим внимание на то, что дисперсионная поправка отрицательна, а закон дисперсии (8.96) совпадает с (8.47), если в последнем уравнении опустить мнимое диссипативное слагаемое $-i\eta k^2/2$. Основываясь на общности уравнений дисперсии и результатах разд. 8.5, согласно которым отрицательной дисперсии соответствуют солитоны сжатия, можно предположить, что в горячей плазме поперек магнитного поля будут распространяться именно солитоны сжатия — горбы магнитного поля (см. обсуждение этого вопроса в [121]).

Однако нам требуется и билинейная поправка к току, причем в этой поправке дисперсионными эффектами можно пренебречь. Не конкретизируя вид зависимости \mathbf{E} и \mathbf{b} от x и t , выполним в (8.94) интегрирование по частям. Старшие члены в разложении выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} f_1^{(i)} = & \frac{ep_{\perp}^2}{2m_i\omega_{B_i}p} \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial p} \int_0^{\infty} \partial_x E_y(x, t - \tau) d\tau + \\ & + \frac{ep_{\perp}}{\omega_{B_i}p} \frac{\partial f_0^{(i)}}{\partial p} \left\{ \left[E_x - \omega_{B_i}^{-1} \partial_t E_y + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{v_{\perp}^2}{2\omega_{B_i}} \int_0^{\infty} d\tau \partial_x^2 E_y(x, t - \tau) \right] \sin \varphi - E_y \cos \varphi \right\}. \quad (8.99) \end{aligned}$$

Интегралы по dt можно вычислить, воспользовавшись уравнением индукции (8.88): $\partial_x E_y = -c^{-1} \partial_t b = c^{-1} \partial_\tau b$. После этого, вычислив $f_2^{(i)}$ с помощью (8.91) и (8.94) и добавив вклад от электронов, получим нелинейный ток

$$j_y^{nl} = \frac{c(3 + \beta - 3\beta_i/4)}{4\pi B_0} b \frac{\partial b}{\partial x}. \quad (8.100)$$

Для получения эволюционного уравнения представим ток j_y^l в виде

$$j_y^l = \frac{c}{4\pi} \frac{c_\perp}{c_A^2} \left\{ -i\omega + ik \frac{c_A^2 \beta}{c_\perp} + (ik)^3 c_\perp a_D^2 \right\} b, \quad (8.101)$$

где использовано уравнение дисперсии (8.96) и связь между E_y , b , вытекающая из (8.88). Перейдя затем к координатно-временному представлению и подставив токи j_y^l и j_y^{nl} в первое уравнение (8.88), получим

$$\partial_t b + c_\perp \partial_x b + c_\perp a_D^2 \partial_x^3 b + \frac{3 + \beta - 3\beta_i/4}{1 + \beta} \frac{c_\perp}{B_0} b \partial_x b = 0. \quad (8.102)$$

Это уравнение КдФ, которое можно записать в форме (8.52), если обозначить

$$\xi = x - c_\perp t, \quad \mu = c_\perp a_D^2, \quad h(\xi, t) = \frac{3 + \beta - 3\beta_i/4}{1 + \beta} c_\perp \frac{b}{B_0}. \quad (8.103)$$

Его солитонные решения были подробно исследованы в разд. 8.5. Образуются солитоны сжатия, ширина которых обратно пропорциональна корню квадратному из амплитуды и имеет порядок величины $\delta \approx r_i (B_0/b_0)^{1/2}$, где b_0 — высота магнитного горба.

8.8. Стационарные нелинейные волны в горячей плазме

Ниже мы получим решения нелинейного уравнения Шрёдингера (8.87), которые описывают нелинейную солитоноподобную волну, перемещающуюся как целое с некоторой скоростью $v = \text{const}$. При этом мы применим тот же метод, что был использован в разд. 8.5 при построении решений уравнения КдФ, т. е. прямое отыскание интегралов движения. Таким путем мы найдем только часть солитонных решений нелинейного уравнения Шрёдингера, которые по структуре будут отличаться от солитонов уравнения КдФ. Более общий способ отыскания решений будет изложен в разд. 9.1.

Ищем решение уравнения (8.87) в виде

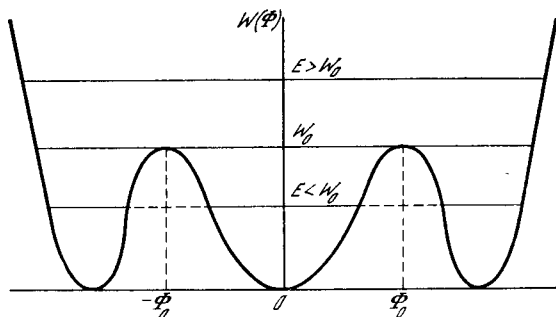
$$h(\xi, \tau) = \Phi(\xi - v\tau) \exp i\theta(\xi - v\tau), \quad (8.104)$$

где Φ и θ — действительные функции. Подставив это решение в (8.87) и разделив действительную и мнимую часть, получим два уравнения:

$$\Phi'' - \theta'(\theta'\Phi + v\Phi - \Phi^3) = 0, \quad (8.105)$$

$$\theta''\Phi + \Phi'(2\theta' + v - 3\Phi^2) = 0. \quad (8.106)$$

Рис. 8.4. Эффективная потенциальная энергия для нелинейного уравнения Шредингера с производной в кубическом члене



Здесь штрихом обозначена производная по аргументу $\xi - vt$. Последнее уравнение имеет интеграл

$$\theta' \Phi^2 + \nu \Phi^2/2 - 3\Phi^4/4 = K = \text{const}, \quad (8.107)$$

откуда

$$\theta' = K/\Phi^2 - \nu/2 + 3\Phi^2/4. \quad (8.108)$$

С помощью (8.108) приводим уравнение (8.105) к виду

$$\Phi'' = -\partial W/\partial \Phi, \quad (8.109)$$

где эффективная потенциальная энергия

$$W(\Phi) = K^2/2\Phi^2 - (K/4 - \nu^2/8)\Phi^2 - \nu\Phi^4/8 + \Phi^6/32. \quad (8.110)$$

Последние два уравнения являются аналогами уравнений (8.55), (8.56) и описывают колебания нелинейного осциллятора единичной массы в потенциальном поле $W(\Phi)$.

Исследуем сначала более простой случай $K = 0$. График потенциальной энергии изображен на рис. 8.4. Он имеет два максимума, расположенные симметрично относительно оси $\Phi = 0$ в точках $\Phi = \pm (2\nu/3)^{1/2} = \pm \Phi_0$, причем $W(\pm \Phi_0) = W_0 = \nu^3/27$. Из закона сохранения энергии

$$\Phi'^2/2 + W(\Phi) = E = \text{const}. \quad (8.111)$$

следует, что при $E < W_0$ имеются три области колебаний нелинейного осциллятора, изображенные на графике $E = \text{const}$ (см. рис. 8.4) сплошными линиями; при $E > W_0$ они сливаются в единую область. Каждой из областей соответствует нелинейная стационарная периодическая волна (ср. с разд. 8.5). Солитоноподобным решениям отвечает значение $E = W_0$; при этом уравнение $W(\Phi) = E$ имеет два двукратных корня $\Phi = \pm \Phi_0$ (и два однократных при $\Phi = \pm 2\Phi_0$). Наличие кратных корней означает, что осциллятор «переваливает» через вершину потенциального горба бесконечно долго, т. е. его колебания происходят по отдельности в трех областях.

Полагая $K = W_0 = \nu^3/27$, находим

$$W_0 - W(\Phi) = (\Phi^2 - \Phi_0^2)(4\Phi_0^2 - \Phi^2)/32 \quad (8.112)$$

и получаем из (8.111), (8.112)

$$\int \frac{d\Phi}{|\Phi^2 - \Phi_0^2| (4\Phi_0^2 - \Phi^2)^{1/2}} = \pm \frac{1}{4} (\xi - \nu\tau). \quad (8.113)$$

Вычисление интеграла (8.113) дает

$$\left| \frac{(4\Phi_0^2 - \Phi^2)^{1/2} + 3^{1/2}\Phi}{(4\Phi_0^2 - \Phi^2)^{1/2} - 3^{1/2}\Phi} \right| = \exp(\pm 2\xi), \quad 2\xi = 3^{-1/2}\nu(\xi - \nu\tau), \quad (8.114)$$

и мы получаем два решения: при $4\Phi_0^2 \geq \Phi^2 \geq \Phi_0^2$

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 \frac{\text{ch}^2 \xi}{\text{sh}^2 \xi + 1/4}; \quad (8.115)$$

при $0 \leq \Phi^2 \leq \Phi_0^2$

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 \frac{\text{sh}^2 \xi}{\text{ch}^2 \xi - 1/4}. \quad (8.116)$$

Фазу волны можно вычислить без затруднений с помощью соотношения (8.108).

Характерной особенностью солитона (8.115) по сравнению с (8.59) является наличие у него «пьедестала»: при $|\xi| \rightarrow \infty$ возмущение не убывает до нуля, но выходит на постоянное значение $\Phi \rightarrow \Phi_0$; фаза θ также принимает при этом произвольное значение. Амплитуда солитона возвышается над пьедесталом на высоту $\Phi_{\text{max}}^2 - \Phi_0^2 = 3\Phi_0^2$. По сравнению с солитоном уравнения КдФ меняется также связь скорости $v_s = c_A(1 + \nu/2)$ и ширины $\delta = 2\sqrt{3}r_A/\nu$ с амплитудой Φ_{max} :

$$v_s - c_A = (3/16)c_A\Phi_{\text{max}}^2, \quad \delta = 16r_A/3^{1/2}\Phi_{\text{max}}^2. \quad (8.117)$$

Для выяснения физического смысла решения (8.116) вычислим с помощью (8.108) фазу

$$\theta(\xi) = \theta_0 - \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \arctg(3^{-1/2} \text{th} \xi), \quad (8.118)$$

где θ_0 — фаза при $\xi \rightarrow -\infty$. Решение нелинейного уравнения Шрёдингера (3.87) примет вид

$$h(\xi) = \pm \Phi_0 \frac{\text{sh} \xi}{(\text{ch}^2 \xi - 1/4)^{1/2}} \exp \left\{ i\theta_0 - i\frac{\pi}{4} - i\frac{3}{2} \arctg(3^{-1/2} \text{th} \xi) \right\}. \quad (8.119)$$

Поскольку $h \sim b_y + ib_z$, из решения (8.119) следует, что при переходе из области $\xi \rightarrow -\infty$ в область $\xi \rightarrow +\infty$ абсолютная величина поля возвращается к исходному значению, но фаза возрастает на $\pi/2$. Это означает, что магнитное поле поворачивается против часовой стрелки на $\pi/2$ при указанном переходе, т. е. рассматриваемое решение описывает вращательный разрыв. В данном случае солитоноподобное возмущение меняет состояние среды (направление магнитного поля в ней). Но это изменение происходит обратимым образом; после прохождения такого же возмущения

в противоположном направлении состояние полностью восстанавливается. Угол поворота поля не зависит от его величины.

Обратимся теперь к случаю $K \neq 0$. Эффективная потенциальная энергия имеет вид (8.110). Решение уравнения (8.109) строится с помощью интеграла энергии (8.111) и записывается в виде

$$\int 2\Phi [P(\Phi^2)]^{-1/2} d\Phi = \pm 1/2 (\xi - \nu\tau). \quad (8.120)$$

Характер решения зависит от числа и кратности действительных корней полинома четвертой степени

$$P(x) = -x^4 + 4vx^3 + 8(K - v^2/2)x^2 + 32Ex - 16K^2, \quad (8.121)$$

где $x = \Phi^2 \geq 0$ и $P(\Phi^2) \geq 0$. Для существования солитоноподобного решения необходимо наличие двукратного корня у полинома $P(x)$. Это возможно только при специальном подборе параметров v , K и E . Требуемый подбор нетрудно произвести, используя правила построения корней алгебраического уравнения 4-й степени [22]. Ниже мы приведем результаты такого анализа.

Представим полином $P(x)$ в виде

$$P(x) = (x - x_2)(x_1 - x)(x - x_0)^2 \geq 0, \quad x_1 \geq x \geq x_2, \quad (8.122)$$

где x_1 , x_2 , x_0 — корни этого полинома. В результате интеграл (8.120) сводится к табличному, и мы получаем два решения [317]:

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 + (\Phi_1^2 - \Phi_0^2) \left[1 + \frac{\Phi_1^2 - \Phi_2^2}{\Phi_0^2 - \Phi_2^2} \text{sh}^2(\zeta - \zeta_1) \right]^{-1}, \quad (8.123)$$

$$\Phi^2 = \Phi_0^2 - (\Phi_0^2 - \Phi_2^2) \left[1 + \frac{\Phi_1^2 - \Phi_2^2}{\Phi_1^2 - \Phi_0^2} \text{sh}^2(\zeta - \zeta_2) \right]^{-1}, \quad (8.124)$$

где ζ_1 , ζ_2 — постоянные;

$$\zeta = 1/4 [(\Phi_0^2 - \Phi_2^2)(\Phi_1^2 - \Phi_0^2)]^{1/2} (\xi - \nu\tau). \quad (8.125)$$

При $|\zeta| \rightarrow \infty$ имеем $\Phi^2 \rightarrow \Phi_0^2$, $\theta' \rightarrow K/\Phi_0^2 - v/2 + 3\Phi_0^2/4 = k$, и решение имеет вид плоской монохроматической волны:

$$h(\xi, \tau) = \Phi_0 \exp(ik\xi - i\omega\tau + i\theta_0), \quad (8.126)$$

где $\omega = kv$. Таким образом, (8.123) представляет собой магнитный горб, а (8.124) — магнитную яму, движущиеся по пьедесталу в виде плоской монохроматической волны.

Следует отметить, что нелинейное уравнение Шрёдингера имеет и такие солитонные решения, которые удовлетворяют условию $\Phi \rightarrow 0$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$, т. е. являются ограниченными в пространстве. Алгоритм построения таких решений методом обратной задачи рассеяния приведен в разд. 9.1.

8.9. Двумерные и трехмерные солитоны. Проблема устойчивости нелинейных волн

Как видно из предыдущего рассмотрения, одномерные солитоны могут быть построены элементарными методами. Метод обратной задачи рассеяния (см. разд. 9.1) позволяет рассчитать эволюцию нелинейного возмущения при достаточно общих предположениях о его начальной форме. Таким образом, в настоящее время имеется хорошо развитая теория нелинейных эволюционных уравнений и их решений в одномерном случае. Особенно подробно изучено одномерное уравнение КдФ. Для двух- и трехмерных задач в отличие от одномерных отсутствуют столь же общие методы решения. Рассмотрены, по существу, лишь отдельные примеры.

К их числу относятся найденные в работе [135] аксиально-симметричные солитоноподобные решения уравнений МГД с дисперсионными поправками, описывающие магнитозвуковые и альвеновские вихри в плазме. Приведем некоторые сведения об этих нелинейных образованиях, отсылая читателя за подробностями к работе [135].

Магнитозвуковой вихрь, который можно рассматривать как нелинейный пакет быстрых магнитозвуковых волн, представляет собой аксиально-симметричное образование, распространяющееся вдоль однородного поля \mathbf{B}_0 . Его размеры в направлении распространения (l_z) и по радиусу (l_r) оцениваются как

$$l_z \approx c_A / \omega_{B_i} A^2, \quad l_r \approx c_A / \omega_{B_i} A^3, \quad (8.127)$$

где A — безразмерная амплитуда вихря. Поскольку $A \ll 1$, то вихрь сплюснут в направлении \mathbf{B}_0 . Магнитное поле магнитозвукового вихря преимущественно радиально, $B_r \approx AB_0$, он распространяется со скоростью $v_s \approx c_A (1 - A^2)$.

Альвеновский вихрь, наоборот, вытянут вдоль \mathbf{B}_0 . Магнитное поле в нем преимущественно азимутально, $B_\phi \approx AB_0$. Его можно рассматривать как волновод вдоль \mathbf{B}_0 радиуса $l_r \approx (Ak_0)^{-1}$, где k_0 — продольное волновое число. Фазовая скорость волны в волноводе $v_{ph} = c_A (1 - A^2 - c_A k_0 / \omega_{B_i})$. Волновод существует при условии $A^2 \ll c_A k_0 / \omega_{B_i} \ll 1$. Другие типы альвеновских солитонов построены в работах [120, 328].

Построение двумерных и трехмерных нелинейных эволюционных уравнений и исследование их решений тесно связаны с проблемой устойчивости одномерных нелинейных волн. Рассмотренные в предыдущих разделах этой главы одномерные солитоны в идеальных условиях (строго однородная среда, строго одномерное начальное возмущение) будут существовать сколь угодно долго. Но возникает вопрос об эволюции такой нелинейной волны в реальных условиях, когда на нее воздействуют различные возмущения, например слабая неоднородность фоновой плазмы, приводящая к искривлению фронта и его модуляции по поперечной координате. Для выяснения этого вопроса необходимо построить по

крайней мере двумерное нелинейное уравнение и исследовать с его помощью поведение малых поперечных возмущений.

Простейшее уравнение такого рода было выведено Кадомцевым и Петвиашвили [89] путем обобщения дисперсионного соотношения для линейных колебаний в изотропной среде. Пусть длинноволновые линейные колебания обладают изотропным законом дисперсии $\omega(k) = c_A k - \mu k^3$, приводящим к уравнению КдФ (см. (8.47); диссипативным членом $\eta k^2/2$ пренебрегаем). Рассмотрим случай, когда пакет волн распространяется в узком конусе углов, т. е. $k_{\perp} \ll k_x$. Учитываем k_{\perp} в низшем приближении только в основном слагаемом $c_A k = c_A k_x + c_A k_{\perp}^2/2k_x$ и пренебрегаем этой величиной в дисперсионной поправке $\mu k^3 \approx \mu k_x^3$. Это приводит к дисперсионному соотношению

$$k_x (\omega - c_A k_x + \mu k_x^3) = c_A k_{\perp}^2/2. \quad (8.128)$$

Использование этого соотношения и учет нелинейности, как это было сделано в разд. 8.4, позволяют получить вместо (8.52) уравнение вида

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\partial_{\xi} u + u \partial_{\xi} u + \mu \partial_{\xi}^3 u) = -\frac{c_A}{2} \Delta_{\perp} u, \quad (8.129)$$

которое называется *уравнением Кадомцева—Петвиашвили*.

Указанные авторы [89], а также Захаров [75] исследовали устойчивость одномерного солитона КдФ. Они пришли к выводу, что при отрицательной дисперсии ($\mu > 0$) солитон устойчив: малые поперечные возмущения вызывают только колебания солитона, которые в реальной ситуации будут медленно затухать из-за различных неучтенных диссипативных процессов, а также за счет излучения звука колеблющимся солитоном. При положительной дисперсии ($\mu < 0$) солитон (8.63) неустойчив: поперечные возмущения будут нарастать с инкрементом

$$\gamma(k_{\perp}) = (2k_{\perp}^2 c_A \Delta u/3)^{1/2} (1 - 4c_A a_D k_{\perp}/\sqrt{6} \Delta u)^{1/2}, \quad (8.130)$$

где $\mu = -c_A a_D^2$; $a_D = (c/\sqrt{2}\omega_{pi})(\text{ctg}^2 \alpha - m_e/m_i)^{1/2}$ — дисперсионная длина. Такая неустойчивость объясняется уменьшением скорости солитона с ростом амплитуды. Поэтому участки фронта с малой амплитудой будут обгонять участки с большей амплитудой. Вследствие этого последние будут усиливаться за счет искривления фронта и «подпитки» их с соседних участков и еще больше отставать (неустойчивость самофокусировочного типа). В результате фронт разобьется на отдельные участки — двумерные или трехмерные волновые пакеты, дальнейшая эволюция которых уже не будет описываться одномерным уравнением КдФ.

В настоящее время исследования проблем устойчивости солитонов ведутся широким фронтом. В частности, нелинейная стадия неустойчивости солитонов КдФ рассмотрена в работах [74, 75]. Модуляционная неустойчивость волн, распространяющихся вдоль магнитного поля, изучалась в [317].

При прохождении через плазму солитона, описываемого уравнением КдФ или нелинейным уравнением Шрёдингера, состояние среды не изменяется (или изменяется лишь обратимым образом — поворот магнитного поля, см. разд. 8.8). В принципе всегда существует столкновительная диссипация, но при редких столкновениях она мала, и состояние среды после прохождения солитона изменяется весьма мало. Если же столкновения играют значительную роль, то в среде может распространяться ударная волна, и состояние среды при этом может измениться весьма значительно на расстоянии порядка ширины фронта (несколько длин свободного пробега частиц). Возникает вопрос: возможно ли в бесстолкновительной плазме существование ударных волн, т. е. таких движений, которые будут изменять необратимым образом состояние среды, причем это изменение будет происходить на расстоянии, много меньшем длины свободного пробега частиц?

Данные наблюдений дают однозначно положительный ответ на этот вопрос. Прямые измерения магнитного поля и параметров плазмы на космических аппаратах в межпланетном пространстве показывают, что сильные возмущения типа ударных волн возникают в межпланетной плазме достаточно часто. Межпланетные ударные волны вблизи орбиты Земли часто имеют толщину фронта порядка 500—1000 и даже 100 км, тогда как длина свободного пробега электронов и ионов относительно кулоновских соударений при типичных условиях приближается к 1 а. е. $\approx 1,5 \cdot 10^8$ км (обзор физических свойств межпланетной плазмы см. в монографии [161] и более полное изложение — в [396]; наблюдательные данные о межпланетных ударных волнах кратко изложены в разд. 9.5). Сравнение указанных масштабов показывает, что межпланетные ударные волны являются сильно бесстолкновительными и их толщина не определяется столкновительной диссипацией энергии и импульса частиц во фронте. Поэтому возникает вопрос о механизмах формирования и о структуре бесстолкновительных ударных волн. Этот вопрос впервые был поставлен Сагдеевым, который развил и первые теории бесстолкновительных ударных волн (см. обзор [149]).

В обычной ударной волне состояние среды изменяется за счет диссипации энергии во фронте, связанной с вязкостью, теплопроводностью и джоулевым тепловыделением. В отсутствие столкновений состояние среды может изменяться за счет возникновения в ней колебаний. При этом ударная адиабата, связывающая состояния среды в двух областях, должна включать в себя потоки энергии и импульса колебаний. Диссипация возникших колебаний, регулярных или стохастических, за счет редких столкновений может происходить более эффективно, чем исходного нелинейного крупномасштабного движения, из которого они возникли. Еще одна возможность открывается за счет взаимодействия частиц

плазмы с мелкомасштабными стохастическими электрическими и магнитными полями колебаний, которые могут генерироваться этими же частицами или иметь внешнее происхождение. Это взаимодействие приводит к появлению аномальных коэффициентов переноса — электропроводности, теплопроводности, вязкости, которые могут играть ту же роль, что и процессы, обусловленные столкновениями частиц. Приведенные качественные соображения показывают, что в бесстолкновительной плазме представляются вполне возможными такие движения, которые можно рассматривать как прямые аналоги ударных волн.

Переходя к рассмотрению (на качественном уровне) некоторых теоретических моделей, описывающих бесстолкновительные ударные волны, прежде всего отметим, что модели квазиперпендикулярных (распространяющихся под прямым или близким к нему углом относительно крупномасштабного магнитного поля) и квазипараллельных ударных волн существенно различаются между собой. Из физических соображений ясно, что при квазиперпендикулярном распространении легче реализовать резкий фронт: частицы не имеют возможности свободно двигаться в направлении распространения волны из-за магнитного поля. Поэтому роль свободного пробега может играть ларморов радиус ионов в исходном регулярном магнитном поле. При квазипараллельном распространении фоновое магнитное поле не препятствует растеканию частиц от фронта. Для формирования резкого фронта необходима генерация дополнительных электрических и магнитных полей ударной волной, и эти поля должны создать перепад плотности плазмы. Эти различия находят формальное отражение в том, что поперечное распространение слабой нелинейной волны описывается более простым уравнением (КдФ), чем продольное распространение (нелинейным уравнением Шрёдингера с производной в нелинейном члене).

Процесс формирования квазипоперечной бесстолкновительной ударной волны был рассмотрен Сагдеевым [149] и в последнее время более подробно — Гуревичем, Питаевским и их сотрудниками [67—69]. В последних работах был рассмотрен, в частности, процесс опрокидывания простой волны в отсутствие столкновений. Дисперсионные эффекты приводят к тому, что в том месте профиля волны, где под влиянием нелинейности должен был бы сформироваться участок с вертикальной производной, возникают колебания. Зона колебаний расширяется со временем. В столкновительной гидродинамике в такой ситуации образовалась бы ударная волна с сильной диссипацией во фронте.

Авторы получили асимптотическое (при больших временах) решение уравнения КдФ и исследовали структуру и эволюцию области колебаний методом Уизема [162]³. На переднем фронте области колебаний возникают отдельные солитоны, расстояние

³ Впоследствии этот же вопрос рассматривался на основе метода обратной задачи рассеяния [164].

между которыми растет со временем логарифмически, а амплитуда — по степенному закону. К заднему фронту амплитуда колебаний уменьшается и они переходят в синусоидальную волну. Средние величины плотности и скорости имеют на переднем фронте слабый разрыв — их производная обращается в бесконечность. Таким образом, вместо диссипативного фронта в бесстолкновительном случае возникает бездиссипативная ударная волна — нестационарная расширяющаяся область, заполненная колебаниями, в которой не происходит роста энтропии.

В работе [69] методом Уизема без линеаризации исследовано решение уравнения КдФ—Бюргерса (8.51) при малой диссипации $\chi\lambda/c_A a_D^2 \ll 1$, где λ — длина волны осцилляций, $a_D = (\mu/c_A)^{1/2}$ — дисперсионная длина. Как уже было отмечено в разд. 8.6, ширина ударного фронта при малой диссипации не зависит от силы ударной волны (ее числа Маха, см. (8.75)), в то время как в отсутствие дисперсионных эффектов она обратно пропорциональна $(M - 1)$ (см. (8.20), (8.21)).

В рассмотренном случае ударная волна имеет ламинарную структуру: в области фронта существуют упорядоченные колебания. Это возможно, однако, только для достаточно слабых волн. При увеличении числа Маха возрастает число ионов, отражающихся от фронта. Они создают многопоточное течение, которое неустойчиво и приводит к турбулентности, т. е. фронт становится турбулентным. Вопрос о критическом числе Маха M_c , при котором происходит переход от ламинарной к турбулентной бесстолкновительной ударной волне, был поставлен впервые Сагдеевым [149]. Он получил для случая поперечного распространения в холодной плазме $M_c = 2$. Впоследствии эти вопросы изучались в [240, 246].

Модель продольной бесстолкновительной ударной волны в горячей плазме ($T_i \gg T_e$) построили Галеев и Сагдеев [556]. Они рассмотрели турбулентную ударную волну малой амплитуды, в которой перепад плотности частиц на фронте формируется за счет генерации магнитных флуктуаций из-за планговой неустойчивости. При этом продольное давление ионов превышает их поперечное давление, $p_{\parallel} - p_{\perp} > 0$, что приводит к генерации гидромагнитных волн и рассеянию частиц на магнитных флуктуациях. Такой механизм не способен обеспечить формирование слишком слабых волн: должно быть выполнено условие $u_{sh} > 2,24 p_0/\rho_0$, где p_0, ρ_0 — параметры плазмы перед фронтом. Толщина фронта оказывается при этом порядка нескольких ионных ларморовых радиусов. Модель Галеева—Сагдеева нашла подтверждение в лабораторном эксперименте [7]: в сверхзвуковом потоке с $\beta \approx 1$ и $T_i \approx 4T_e$ возникала бесстолкновительная ударная волна с турбулентной структурой. Лабораторное моделирование квазипоперечных ударных волн и бесстолкновительных ударных волн в плазме без магнитного поля также проводилось разными авторами (см. по этому вопросу обзор [243]).

Глава 9. ГЕНЕРАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН

9.1. Эволюция нелинейного возмущения в плазме и образование солитонов

Структура и особенности распространения возмущений конечной амплитуды в магнитоактивной плазме определяются, как мы убедились в предыдущей главе, конкуренцией эффектов нелинейного укручения профиля волны, дисперсии и диссипации. Замечательно, что множество весьма различных по характеру явлений, таких, как формирование структуры ударных волн, динамика нелинейных волн в холодной магнитоактивной плазме, распространение возмущений магнитозвукового типа в горячей плазме поперек магнитного поля и др., может быть описано решениями нелинейного уравнения Кортевега—де Фриса. В этой главе мы будем рассматривать уравнение КдФ вида

$$\partial_t u + u \partial_x u + \beta \partial_{xxx}^3 u = 0. \quad (9.1)$$

или в «канонической форме», использовавшейся в пионерских работах по методу обратной задачи рассеяния [254]:

$$\partial_t u - \text{в} i u \partial_x u + \partial_{xxx}^3 u = 0. \quad (9.2)$$

Легко убедиться, что эти уравнения при $\beta \neq 0$ связаны масштабным преобразованием искомой функции $u(x, t)$.

Другим важным нелинейным уравнением, описывающим эффекты в сильно диспергирующей среде, является нелинейное уравнение Шрёдингера [79]

$$i \partial_t \psi + \partial_{xx}^2 \psi + \alpha |\psi|^2 \psi = 0. \quad (9.3)$$

Мы, однако, в этом разделе будем рассматривать модификацию уравнения (9.3) — нелинейное уравнение Шрёдингера с нелинейностью в производной, которое имеет вид

$$i \partial_t q + \partial_{xx}^2 q \pm i \partial_x (q^* q^2) = 0. \quad (9.4)$$

Данное уравнение описывает эволюцию возмущений альвеновского типа, распространяющихся вдоль магнитного поля в горячей плазме (см. разд. 8.7). Основная задача настоящего раздела — анализ эволюции возмущений конечной амплитуды в плазме, описываемых уравнениями (9.1), (9.2) или (9.4), и изложение методов решения этих уравнений при заданных начальных условиях. Приведенные выше уравнения (9.1)—(9.4) относятся к классу нелинейных одномерных эволюционных уравнений, допускающих

точные решения задачи Коши методом обратной задачи рассеяния [77, 1]. Поэтому мы изложим здесь общую идею метода обратной задачи рассеяния и конкретные схемы отыскания решений (в основном асимптотических), рекомендуя читателю подробнее ознакомиться с данным методом по фундаментальной монографии [77].

Идея метода состоит в том, что нелинейному уравнению ставится в соответствие несколько линейных дифференциальных операторов таким образом, что искомая функция является коэффициентом в этих линейных операторах. Исходное нелинейное уравнение при этом можно представить в форме операторного равенства (форма Лакса), или оно может являться условием совместимости системы линейных дифференциальных уравнений, в которых искомое решение нелинейного уравнения является коэффициентом. Задача восстановления коэффициентов линейного дифференциального уравнения по его спектральным характеристикам и асимптотическому виду фундаментальных решений (данным рассеяния) обычно называется обратной задачей рассеяния. Вычисление данных рассеяния по начальному условию, наложенному на искомую функцию, сводит задачу к обратной задаче рассеяния для линейных операторов. Рассмотрим конкретную реализацию этой идеи [254] на примере эволюции возмущений конечной амплитуды описываемых уравнением (9.2).

Метод решения уравнения КдФ. Пусть $u(x, 0) \equiv u_0(x)$ описывает начальный профиль величины, эволюция которой происходит согласно уравнению КдФ (9.2). Уравнение (9.2) можно представить в форме Лакса:

$$\partial_t \hat{L} = [\hat{L}, \hat{A}], \quad (9.5)$$

где линейные операторы \hat{L} и \hat{A} имеют вид

$$\hat{L} = -\partial_{xx}^2 + u(x, t), \quad \hat{A} = 4\partial_{xxx}^3 - 3(u\partial_x + \partial_x u), \quad (9.6)$$

$$[\hat{L}, \hat{A}] = \hat{L}\hat{A} - \hat{A}\hat{L}. \quad (9.7)$$

Из представления (9.5) можно убедиться в независимости от времени собственных значений оператора \hat{L} , который совпадает по форме с оператором энергии уравнения Шрёдингера, описывающего частицу в одномерном потенциальном поле $u(x, t)$, где время t играет роль параметра. Мы ограничимся рассмотрением быстроубывающих при $x \rightarrow \pm \infty$ решений $u(x, t)$, считая выполненным условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) u_0(x) dx < \infty. \quad (9.8)$$

Решение задачи с периодическими граничными условиями для уравнения КдФ можно найти в [77]. Следуя общей идее, нам надо решить обратную задачу рассеяния для уравнения типа Шрёдин-

гера, потенциал которого удовлетворяет уравнению КдФ (9.2)

$$-\partial_{xx}^2 f + u(x, t)f = \lambda f. \quad (9.9)$$

Данные рассеяния для этого уравнения включают множество собственных значений λ , коэффициент отражения $r(k, t)$, определяемый асимптотическим поведением решения (9.9) в непрерывном спектре $\lambda = k^2 > 0$, и набор коэффициентов $c_n(t)$, определяющих асимптотику нормированных на единицу решений (9.9), соответствующих дискретным значениям λ_n . Эволюция во времени решения $u(x, t)$, как будет видно ниже, полностью определяется зависимостью от времени данных рассеяния [254, 255]. Спектр собственных значений λ от времени не зависит в силу (9.5), поэтому его можно найти из уравнения

$$-\partial_{xx}^2 f + u_0(x) f = \lambda f. \quad (9.10)$$

Решив задачу (9.10) с потенциалом $u_0(x)$, получим допустимые значения λ , которые в общем случае включают как дискретные, так и непрерывные значения. Из уравнения (9.10) найдем также начальные значения данных рассеяния. При $\lambda = k^2 > 0$ (в непрерывной части спектра) коэффициент отражения $r(k, 0)$ можно определить из асимптотического вида решения (9.10) :

$$f_k(x) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + r(k, 0) e^{ikx}, & x \rightarrow \infty, \\ d(k, 0) e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (9.11)$$

Заметим, что по терминологии, принятой в квантовой механике, $r(k, 0)$ следует называть амплитудой коэффициента отражения, однако в методе обратной задачи рассеяния коэффициентом отражения называют именно $r(k, 0)$. Коэффициенты $c_n(0)$ найдем из собственных функций $f_n(x)$ дискретного спектра ($\lambda_n = -\kappa_n^2$) задачи (9.10)

$$c_n(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) e^{\kappa_n x}$$

при условии,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2 dx = 1. \quad (9.12)$$

Зависимость от времени данных рассеяния в случае, когда $u(x, t)$ удовлетворяет КдФ, имеет вид, указанный впервые Гарднером и соавторами [254, 255]:

$$c_n(t) = c_n(0) \exp(4\kappa_n^3 t), \quad (9.13)$$

$$r(k, t) = r(k, 0) \exp(8ik^3 t). \quad (9.14)$$

Последним этапом метода обратной задачи рассеяния является восстановление $u(x, t)$ по данным рассеяния (9.13), (9.14) и спектру собственных значений λ . Это можно сделать, используя линей-

ное интегральное уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко

$$G(x, y, t) + F(x + y, t) + \int_x^{\infty} F(y + z, t)G(x, z, t)dz = 0. \quad (9.15)$$

Ядро интегрального уравнения определяется данными рассеяния:

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-\lambda_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k, t) e^{ikx} dk. \quad (9.16)$$

Решение уравнения КдФ связано с решением интегрального уравнения (9.15) соотношением

$$u(x, t) = -2\partial_x G(x, x, t). \quad (9.17)$$

Таким образом, определение эволюции локализованного начального профиля возмущения, описываемого уравнением КдФ (9.2), сводится к следующим этапам:

- 1) определение начальных значений данных рассеяния из уравнения типа Шрёдингера (9.10) с потенциалом $u_0(x)$;
- 2) построение ядра интегрального уравнения (9.16) из данных рассеяния, зависящих от времени, в соответствии с (9.13), (9.14);
- 3) решение линейного интегрального уравнения (9.15);
- 4) определение профиля возмущения $u(x, t)$ в произвольный момент времени из соотношения (9.17).

Общих формул, дающих аналитическое решение уравнений (9.10) и (9.15), разумеется, нет, однако существует очень важный класс частных решений уравнения (9.2), который мы рассмотрим подробнее. Это так называемые солитонные решения [77, 1], описывающие уединенные волны. Решения в виде уединенных волн уравнения КдФ связаны с дискретной частью спектра собственных значений λ уравнения (9.10). Если начальное условие $u_0(x)$ таково, что коэффициент отражения $r(k, 0) = 0$ (такие $u_0(x)$ называют безотражательными потенциалами), то ядро уравнения (9.15) определяется дискретным спектром. При конечном числе N значений дискретного спектра и $r(k, 0) = 0$ ядро (9.16) является вырожденным. Интегральное уравнение (9.15) с вырожденным ядром вида

$$F(x) = \sum_{n=1}^N c_n^2(t) e^{-\lambda_n x} \quad (9.18)$$

можно решить [77] сведением к алгебраической системе уравнений, что реализуется подстановкой

$$G(x, y, t) = \sum_{n=1}^N G_n(x, t) e^{-\lambda_n y}. \quad (9.19)$$

В результате решение уравнения КдФ в случае безотражательного начального условия можно представить как

$$u(x, t) = -2\partial_{xx}^2 \ln \det \widehat{B}(x, t), \quad (9.20)$$

где квадратная $N \times N$ матрица $\hat{B}(x, t)$ имеет вид

$$B_{mn} = \delta_{mn} + \frac{c_n^2(t)}{\kappa_n + \kappa_m} \exp[-(\kappa_n + \kappa_m)x]. \quad (9.21)$$

В частности, если профиль $u_0(x)$ таков, что задача (9.10) имеет лишь один дискретный уровень, получим

$$u(x, t) = - \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa(x - 4\kappa^2 t - \varphi)}, \quad (9.22)$$

где фаза $\varphi = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{c(0)}{2\kappa}$. Решение вида (9.22) описывает уединенную волну, называемую солитоном. Решение (9.20) называется N -солитонным решением. Этот класс решений уравнения КдФ обладает замечательным свойством. Эволюция решения (9.20) сводится к парным «упругим» соударениям солитонов с различными амплитудами и скоростями. Солитоны уравнения КдФ (9.22) имеют скорости, прямо пропорциональные их амплитудам. Поэтому асимптотически на больших временах солитоны «упорядочиваются» — выстраиваются в цепочку в соответствии с величинами собственных значений κ_n . Подробнее свойства N -солитонных решений уравнения КдФ рассмотрены в книге [77]. Мы остановимся здесь на случае многосолитонных решений. Если начальное распределение $u_0(x)$ удовлетворяет условию квазиклассичности, то для вычисления собственных значений λ можно использовать правило квантования Бора—Зоммерфельда [110]:

$$\oint \sqrt{\lambda_n - u_0(x)} dx = 2\pi(n + \delta), \quad (9.23)$$

где δ — число, определяющееся по виду возмущения $u_0(x)$, обычно $\delta = 1/2$. Условие квазиклассичности обычно сводится к $n \gg \gg 1$. В этом случае уровни расположены густо и имеет смысл, следуя работам [275, 162], ввести число собственных значений $g(\lambda)$, приходящихся на интервал $[\lambda; \lambda + d\lambda]$:

$$g(\lambda) = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{dx}{[\lambda - u_0(x)]^{1/2}}. \quad (9.24)$$

Отсюда в квазиклассическом приближении мы можем вычислить число солитонов, имеющих амплитуды в интервале $[\alpha, \alpha + d\alpha]$, согласно [162]:

$$P(\alpha) = \frac{1}{8\pi} \oint \frac{dx}{[|u_0| - \alpha/2]^{1/2}}. \quad (9.25)$$

Метод решения уравнения Шрёдингера с нелинейностью в производной. Возмущения альвеновского типа с конечной амплитудой, распространяющиеся вдоль магнитного поля в горячей плазме, могут быть описаны комплексной величиной $q(x, t) = B_y + iB_z$ (см. (8.87)), которая удовлетворяет уравнению

$$i\partial_t q + \partial_{xx}^2 q \pm i\partial_x(q^*q^2) = 0. \quad (9.26)$$

Рассмотрим схему решения данного уравнения методом обратной задачи рассеяния [276, 58]. Уравнение (9.26) можно представить как условие совместимости системы уравнений для функций $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$:

$$\partial_x v_1 + i\zeta^2 v_1 = q\zeta v_2, \quad (9.27)$$

$$\partial_x v_2 - i\zeta^2 v_2 = r\zeta v_1, \quad (9.28)$$

$$i\partial_t v_1 = (2\zeta^4 + \zeta^2 r q) v_1 + (2i\zeta^3 q - \zeta\partial_x q + i\zeta r q^2) v_2, \quad (9.29)$$

$$i\partial_t v_2 = (2i\zeta^3 r + \zeta\partial_x r + i\zeta r^2 q) v_1 - (2\zeta^4 + \zeta^2 r q) v_2, \quad (9.30)$$

где $r = \pm q^*$; ζ — некоторый комплексный параметр. В соответствии с общей идеей метода, изложенной в начале раздела, обратная задача строится для системы уравнений (9.27), (9.28). Рассматриваем, как и в случае уравнения КдФ, решения уравнения (9.26), быстро убывающие на бесконечности:

$$q(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (9.31)$$

Обобщение метода на класс функций, стремящихся на бесконечности к ненулевым постоянным, сделано в работе [277]. Метод, используемый нами [276], основан на решении Захарова и Шабата нелинейного уравнения Шрёдингера (9.3) [79]. Для системы уравнений (9.27) и (9.28) введем две пары фундаментальных решений $\{\Phi, \bar{\Phi}\}$ и $\{\Psi, \bar{\Psi}\}$, фиксируемые следующими асимптотиками:

$$\Phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta^2 x}, \quad \bar{\Phi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta^2 x} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (9.32)$$

$$\Psi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta^2 x}, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta^2 x} \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (9.33)$$

где используются столбцы вида $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Введенные таким образом решения называют функциями Йоста данной задачи. В силу линейности системы уравнений (9.27), (9.28) должна иметь место линейная связь вида

$$\Phi = a\bar{\Psi} + b\Psi, \quad (9.34)$$

$$\bar{\Phi} = -\bar{a}\Psi + \bar{b}\bar{\Psi}, \quad (9.35)$$

где

$$\bar{\Phi}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi^*(\zeta^*), \quad (9.36)$$

$$\bar{\Psi}(\zeta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi^*(\zeta^*) \quad (9.37)$$

где $r = \pm q^*$. Отсюда можно получить

$$\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta^*), \quad \bar{b}(\zeta) = \mp b^*(\zeta^*).$$

Теперь можно определить данные рассеяния для рассматриваемой задачи. Спектр ζ в общем случае состоит из непрерывной части

и дискретных собственных значений, определяемых нулями функции $a(\zeta)$ в верхней полуплоскости ($\text{Im } \zeta^2 > 0$) комплексной плоскости ζ^2 . Собственные значения непрерывного спектра в этой задаче состоят из вещественных значений $\zeta^2 = \lambda$. Для вещественных λ строится функция

$$\rho(\lambda) = \left[\frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} \right] \zeta^{-1}, \quad (9.38)$$

являющаяся составной частью данных рассеяния [276]. Нули функции $a(\zeta)$ в полуплоскости $\text{Im } \zeta^2 > 0$ есть собственные значения «связанных состояний». Функция $a(\zeta)$ — четная по ζ , поэтому если ζ_l — собственное значение, то и $-\zeta_l$ также принадлежит дискретному спектру. Поэтому полное число нулей $a(\zeta)$ четно и равно $2N$ (мы будем считать далее, что все нули простые). Пронумеруем связанные состояния так, что ζ_l и $-\zeta_l$ стоят рядом, тогда можно определить $\lambda_k = \zeta_{2k-1}^2 = \zeta_{2k}^2$, где $k = 1, 2, \dots, N$. Введем данные рассеяния в дискретном спектре:

$$c_k = i \frac{b(\zeta_{2k})}{\zeta_{2k}} (\partial_{\lambda} a)_{\lambda=\lambda_k}^{-1} \quad (9.39)$$

[276]. Итак, данные рассеяния для системы уравнений (9.27), (9.28) состоят из $\rho(\lambda)$ при вещественном λ (9.38) и $\{c_k, \lambda_k\}$, $k = 1, 2, \dots, N$, в дискретном спектре. Эволюция во времени данных рассеяния определяется с использованием (9.29) и (9.30) и имеет следующие законы:

$$i\partial_t \rho = -4\lambda^2 \rho, \quad (9.40)$$

$$i\partial_t \lambda_k = 0, \quad (9.41)$$

$$i\partial_t c_k = -4\lambda_k^2 c_k. \quad (9.42)$$

Уравнения (9.40)–(9.42) должны быть дополнены начальными значениями данных рассеяния. Эти данные следует вычислить по схеме, описанной выше, приводящей к (9.38) и (9.39), исходя из системы (9.27), (9.28), где в качестве q и r стоят $q(x, 0)$ и $\pm q^*(x, 0)$ соответственно. Следующим этапом метода является построение ядра интегральных уравнений, являющихся аналогом уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко (9.15):

$$F(z, t) = \sum_{k=1}^N c_k(t) \exp(i\lambda_k z) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\lambda, t) \exp(i\lambda z) d\lambda. \quad (9.43)$$

Далее необходимо решить систему интегральных уравнений

$$G_2^*(x, y, t) - i \int_x^{\infty} G_1(x, s, t) F'(s + y, t) ds = 0, \quad (9.44)$$

$$\pm G_1(x, y, t) + F^*(x + y, t) + \int_x^{\infty} G_2^*(x, s, t) F^*(s + y, t) ds = 0, \quad (9.45)$$

где $F'(z, t) \equiv \partial_z F$, а знак в (9.45) выбирается в соответствии со знаком $r = \pm q^*$. Последний этап метода состоит в нахождении решения $q(x, t)$ из соотношения

$$G_1(x, x, t) = -\frac{1}{2} q(x, t) \exp\left(i \int_x^\infty r q dx\right). \quad (9.46)$$

Рассмотрим теперь солитонные решения уравнений (9.3) [276]. Так же как и в случае уравнения КдФ, солитоны определяются дискретным спектром задачи рассеяния. N -солитонное решение можно получить полагая $\rho(\lambda) = 0$. Мы приведем односолитонное решение. Пусть имеем одно значение λ_1 , которое удобно представить в виде

$$\lambda_1 = i\Delta^2 \exp[\pm i(\pi/2 - \gamma)], \quad 0 < \gamma < \pi, \quad (9.47)$$

введем

$$\eta = \text{Im } \lambda_1 = \Delta^2 \sin \gamma, \quad (9.48)$$

$$\omega = \text{Re } \lambda_1 = \mp \Delta^2 \cos \gamma. \quad (9.49)$$

Соответствующий коэффициент c_1 , следуя [276], представим в форме

$$c_1(t) = 2(\eta/\Delta) \exp[2i\sigma_0(t)] \exp[2\eta x_0(t)]. \quad (9.50)$$

Эволюция данных рассеяния в этом случае сводится к зависимости от времени $\sigma_0(t)$ и $x_0(t)$ и определяется уравнениями

$$\partial_t \sigma_0 = 2\Delta^4 \cos 2\gamma, \quad \partial_t x_0 = \pm 4\Delta^2 \cos \gamma.$$

Систему интегральных уравнений (9.44) и (9.45) в данном случае можно решить. Поскольку ядро вырождено, получим

$$q(x, t) \exp\left(i \int_x^\infty r q dx\right) = \pm 4\Delta \sin \gamma \frac{[\exp(2\theta) \exp(-2i\sigma)]}{\exp(4\theta) + \exp(\mp i\gamma)}, \quad (9.51)$$

$$\theta \equiv \eta(x - x_0(t)), \quad (9.52)$$

$$\sigma \equiv \omega x + \sigma_0(t). \quad (9.53)$$

Умножив (9.51) на комплексно-сопряженное ему выражение и выполнив интегрирование по x , получим

$$\exp\left(\frac{i}{2} \int_x^\infty r q dx\right) = \frac{[\exp(4\theta) + \exp(\pm i\gamma)]}{\exp(4\theta) + \exp(\mp i\gamma)}. \quad (9.54)$$

В итоге получим солитонное решение уравнения (9.4):

$$q(x, t) = \pm 4\Delta \sin \gamma \frac{\exp(-2i\sigma) \exp(2\theta) [\exp(4\theta) + \exp(\mp i\gamma)]}{[\exp(4\theta) + \exp(\pm i\gamma)]^2}, \quad (9.55)$$

где

$$\theta(x, t) = \Delta^2 \sin \gamma (x \mp 4\Delta^2 t \cos \gamma + x_0), \quad (9.56)$$

$$\sigma(x, t) = \mp \Delta^2 x \cos \gamma + 2\Delta^4 t \cos^2 \gamma + \sigma_0, \quad (9.57)$$

постоянные σ_0 и x_0 определяются через $c_1(0)$ начальным профилем $q(x, 0)$. Солитонное решение уравнения (9.4) отличается от солитона КдФ (9.22) несколькими особенностями. Солитон (9.55) имеет осцилляционную структуру, описываемую $\exp(-2i\sigma(x, t))$ внутри огибающей. Период осцилляций связан с амплитудой солитона. Связь скорости огибающей солитона (9.55) с амплитудой отличается от простой зависимости, имеющей место у солитона КдФ (9.22), где скорость солитона пропорциональна его амплитуде. Заметим, что уравнение (9.4) допускает решение в виде так называемого алгебраического солитона [276], который имеет огибающую со степенным законом спада (аналогичную лоренцевскому контуру линии). Это решение можно получить из (9.55), выполнив предельный переход $\gamma \rightarrow \lambda$. Алгебраический солитон, однако, неустойчив по отношению к малым вариациям данных рассеяния. Резюмируя сказанное в данном разделе, отметим важную роль солитонных решений в асимптотическом режиме эволюции возмущения конечной амплитуды в плазме. Часть возмущения, связанная с непрерывным спектром соответствующих спектральных задач, так называемое излучение, убывает во времени за счет дисперсионных эффектов.

9.2. Формирование и распространение ударных волн. Автомодельные и асимптотические решения

В предыдущих разделах мы обсуждали эволюцию плавных возмущений в среде с дисперсией. Однако в астрофизических условиях часто возникают сильные нелинейные возмущения, эволюция которых определяется нелинейными эффектами и диссипацией, а роль дисперсии невелика. Такие возмущения возникают, как правило, в системах с сильным энерговыделением. Примерами являются, в частности, вспышки сверхновых и новых звезд, проявления активности галактических ядер и квазаров, взаимодействие сильных звездных ветров с окружающей средой, а также многие нестационарные процессы на Солнце и в межпланетной среде. Из широкого круга вопросов, относящихся к упомянутым явлениям, мы остановимся в основном на распространении ударных волн. Формирование и распространение ударных волн описываются нелинейными уравнениями газодинамики. В общем случае исследование этих уравнений представляет сложную задачу, мы ограничимся здесь описанием класса точных и приближенных решений уравнений газодинамики, которые называются автомодельными решениями. В разд. 2.1 мы рассмотрели простые волны — класс точных решений бездиссипативных уравнений газодинамики, в которых все искомые величины выражаются через одну, которую можно принять за независимую переменную.

Применение решений типа простых волн ограничено двумя важными обстоятельствами. Во-первых, решения типа простых волн относятся лишь к плоским волнам (одномерные решения). Во-вторых, пренебрежение диссипативными эффектами ограничи-

вает применимость решений моментом «опрокидывания» волны, после которого решения типа простых волн становятся неоднозначными и теряют физический смысл. Придание физического смысла решениям типа простых волн после опрокидывания осуществляется путем введения разрывов физических величин. Построение решений с разрывами, которые фактически являются областями диссипации, можно выполнить с помощью правила площадей [162]. С другой стороны, распространение сильных возмущений — ударных волн сферической, цилиндрической и плоской геометрии — в ряде важных случаев можно описать, используя автомодельные решения — класс точных решений уравнений газовой динамики [151, 81, 162, 112].

Автомодельные решения обладают симметрией по отношению к преобразованиям подобия. Это означает, что значения параметров течения (скорости, плотности, давления и т. п.) в некоторой точке в данный момент связаны с их значениями в другой момент в другой точке посредством простого преобразования масштабов измерения независимых переменных и самих параметров течения. Математически это реализуют, выражая параметры течения в виде функций типа $t^\alpha f(\lambda)$, где $\lambda = \text{const } rt^{-n}$. Степени α для разных величин, характеризующих течение, в общем случае различны, а автомодельная переменная λ одна — она и определяет симметрию течения. Автомодельные решения, допускаемые задачей, могут быть одного из двух возможных типов. В автомодельных решениях первого типа определение автомодельной переменной λ и показателя α возможно непосредственно из анализа размерностей определяющих величин задачи и законов сохранения в интегральной форме [151]. Примеры таких задач, среди которых наиболее широко известно решение задачи о сильном взрыве, полученное Л. И. Седовым, мы рассмотрим далее. В автомодельных решениях второго типа показатели степеней автомодельных переменных находят из условия существования решения данного вида, т. е. решением задачи на собственные значения [10]. Пример такой задачи дает автомодельная интерпретация асимптотического решения уравнения КдФ (9.4), приведенного в разд. 9.1 [10], мы вернемся еще к этому примеру несколько позже.

Задача о сильном взрыве в однородной среде. Пусть в момент времени $t = 0$ в газе с плотностью ρ_0 в малой области вблизи точки $r = 0$ выделена энергия ε . Требуется описать эволюцию получившегося возмущения. Это удастся сделать сравнительно просто только при сильном энерговыделении, когда давление и скорость вещества в возникающей области велики по сравнению с давлением в окружающем невозмущенном газе и скоростью звука в нем и последними можно пренебречь. В отсутствие вязкости и теплопроводности (роль последней обсудим ниже) граница возмущенного и невозмущенного газов представляет собой разрыв — сильную ударную волну. Закон движения этой границы, следуя Седову [150, 151], найдем из соображений размерности. Имеется единственная величина, составленная из определяющих парамет-

ров задачи, имеющая размерность длины. Радиус фронта сферической ударной волны $R_s(t)$, ограничивающей возмущенную область, должен быть пропорционален этой величине:

$$R_s(t) = (a\epsilon t^2/\rho_0)^{1/2}, \quad (9.58)$$

где a — безразмерная постоянная, подлежащая определению. Скорость ударной волны относительно неподвижного, невозмущенного газа можно выразить так:

$$v_s(t) = \frac{dR_s}{dt} = \frac{2}{5} \frac{R_s}{t} \sim t^{-3/2}. \quad (9.59)$$

Соотношения (9.58) и (9.59) нетрудно обобщить на случаи цилиндрической и плоской ударных волн. В этих случаях надо под ϵ понимать удельное энерговыделение на единицу длины или площади соответственно. С учетом этого закон движения ударного фронта можно представить так:

$$R_s(t) = (a\epsilon t^{2\Delta}/\rho_0)^{1/(2+\Delta)}, \quad (9.60)$$

здесь $\Delta = 1, 2, 3$ соответственно в случае плоской, цилиндрической и сферической симметрий. Скорости фронта в этих случаях имеют вид

$$v_s(t) = \frac{dR_s}{dt} = \frac{2}{2+\Delta} \frac{R_s}{t} \sim t^{-\Delta/(2+\Delta)}. \quad (9.61)$$

Параметры газа непосредственно за фронтом сильной ударной волны в отсутствие давления невозмущенного газа легко получить, используя граничные условия на ударном фронте (см. разд. 2.6):

$$v_2 = \frac{2}{\gamma+1} v_s, \quad (9.62)$$

$$\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, \quad (9.63)$$

$$P_2 = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 v_s^2, \quad (9.64)$$

где γ — показатель адиабаты идеального газа. Индекс 2 у параметров газа означает, что они взяты в точке $r \rightarrow R_s - 0$, т. е. за фронтом. После установления закона движения фронта и граничных условий можно найти параметры поля течения в возмущенной области. Седов показал, что адиабатическое течение в возмущенном газе допускает автомодельное описание. Плотность, скорость и давление газа в адиабатическом течении, обладающем симметрией рассмотренного типа, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\partial_t \rho + \partial_r(\rho v) + (\Delta - 1) r^{-1} \rho v = 0, \quad (9.65)$$

$$\partial_t v + v \partial_r v + \rho^{-1} \partial_r P = 0, \quad (9.66)$$

$$(\partial_t + v \partial_r) c_v \ln(P \rho^{-\gamma}) = 0. \quad (9.67)$$

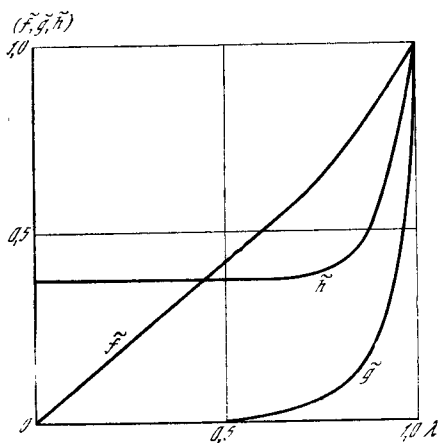


Рис. 9.1. Распределения плотности \tilde{g} , давления \tilde{h} и скорости \tilde{f} за фронтом сильной ударной волны (функции \tilde{g} , \tilde{h} , \tilde{f} нормированы на единицу при $\lambda = 1$)

Введение автомодельной переменной λ и безразмерных независимых переменных согласно соотношениям

$$\lambda = r/R_s, \quad \rho = \rho_0 g(\lambda),$$

$$v = v_s f(\lambda), \quad P = \rho_0 v_s^2 h(\lambda) \quad (9.68)$$

позволяет получить из (9.65)—(9.67) систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$g(f - \lambda) f' + h' - (\Delta/2) fg = 0, \quad (9.69)$$

$$(f - \lambda) g' + \left(f' - \frac{\Delta - 1}{\lambda}\right) g = 0, \quad (9.70)$$

$$(f - \lambda) h' + \gamma \left(f' + \frac{\Delta - 1}{\lambda}\right) h - \Delta h = 0. \quad (9.71)$$

Данная система уравнений дополняется граничными условиями для функций $g(\lambda)$, $f(\lambda)$, $h(\lambda)$, которые следуют из (9.62)—(9.64):

$$g(1) = (\gamma + 1)/(\gamma - 1), \quad f(1) = 2/(\gamma + 1), \quad h(1) = 2/(\gamma + 1). \quad (9.72)$$

Система уравнений (9.69)—(9.71) с граничными условиями (9.72) допускает аналитическое решение. Мы, однако, приведем здесь (рис. 9.1) лишь асимптотический вид функций ρ , v , P в окрестности центра и кривые, качественно иллюстрирующие поведение параметров течения во всей возмущенной области. Пробный анализ решения с учетом неоднородности среды можно найти в книгах [151, 81]. В окрестности центра асимптотическое поведение параметров сферически-симметричного адиабатического течения дается следующими соотношениями:

$$v(r, t) \simeq \frac{2}{5\gamma} \frac{r}{t}, \quad (9.73)$$

$$\rho(r, t) \simeq k_1 \rho_0 (\varepsilon t^2 / \rho_0)^{-3(5(\gamma-1))} r^{3/(\gamma-1)}, \quad (9.74)$$

$$P(r, t) \simeq k_2 \rho_0 (\varepsilon / \rho_0 t^3)^{2/5}, \quad (9.75)$$

$$T(r, t) \simeq \frac{k_3}{c_V} \left(\frac{\varepsilon}{\rho_0}\right)^{\frac{2\gamma+1}{5(\gamma-1)}} t^{\frac{6(2-\gamma)}{5(\gamma-1)}} r^{-\frac{3}{\gamma-1}}. \quad (9.76)$$

Постоянные k_1 , k_2 , k_3 , представляющие собой весьма громоздкие функции γ , можно найти в книге Седова [151].

Адиабатическое решение задачи о сильном взрыве приводит к бесконечной температуре в окрестности центра. Поэтому учет даже малой, но конечной теплопроводности существенно модифицирует решение. Для оценки порядка величины эффекта теплопроводности сравним, следуя работе [382], плотность потока тепла от центра (вычисленную на основе адиабатического решения) q_T с плотностью потока энтальпии q_w . В качестве коэффициента теплопроводности можно использовать теплопроводность плазмы, связанную с кулоновскими соударениями частиц. Соответствующий коэффициент теплопроводности $\kappa \sim T^{3/2}$ [19]. Используя аппроксимации параметров адиабатического решения, можно получить [382]

$$q_T(\lambda) \simeq 0,7 \cdot 10^{-3} \lambda^{-16} \left(\frac{R_s}{1 \text{ пк}} \right)^{-1} \left(\frac{T_s}{10^6 \text{ К}} \right)^{7/2}, \quad (9.77)$$

$$q_w(\lambda) \simeq 1,4 \cdot 10^{-2} (\lambda + 3\lambda^{10}) \left(\frac{n_0}{1 \text{ см}^{-3}} \right) \left(\frac{T_s}{10^6 \text{ К}} \right)^{3/2}, \quad (9.78)$$

где T_s — температура газа за фронтом ударной волны; n_0 — концентрация частиц невозмущенного газа; q_T и q_w выражены в эрг/(см²·с).

В частности, для остатка сверхновой с параметрами $T_s = 5 \times 10^6 \text{ К}$, $n_0 \simeq 0,3 \text{ см}^{-3}$, $R_s = 15 \text{ пк}$ имеем [382] $q_T/q_w > 1$ при $\lambda \leq 0,9$. Следует отметить, что при фиксированном λ имеем $q_T/q_w \sim t^{-1/5}$, т. е. эффект наиболее существен на ранних стадиях эволюции системы. В общем случае включение в рассмотрение эффектов конечной вязкости и теплопроводности газа нарушает автомодельность решения задачи о сильном взрыве. Имеются частные зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры, допускающие автомодельное решение (см., например, [151]). Мы рассмотрим здесь изотермические решения, соответствующие режиму течения с однородным в пространстве, но переменным во времени распределением температуры в возмущенной области. Однородность температуры отвечает случаю высокой теплопроводности газа и интенсивным процессам теплообмена.

Задача о сильном взрыве в неоднородном газе с высокой теплопроводностью. Рассмотрим точечный взрыв в среде с неоднородным распределением плотности, характеризуемым одной размерной величиной:

$$\rho_0(r) = Ar^{-\omega}, \quad (9.79)$$

Интерес представляют $0 < \omega < 3$, так как случаю $\omega \geq 3$ соответствует бесконечная масса вещества в сфере любого конечного радиуса, взятой вокруг начала координат. Радиус фронта ударной волны, как и в случае однородной среды, может быть найден из соображений размерности [151, 382]:

$$R_s(t) = (aet^2/A)^{1/(5-\omega)}. \quad (9.80)$$

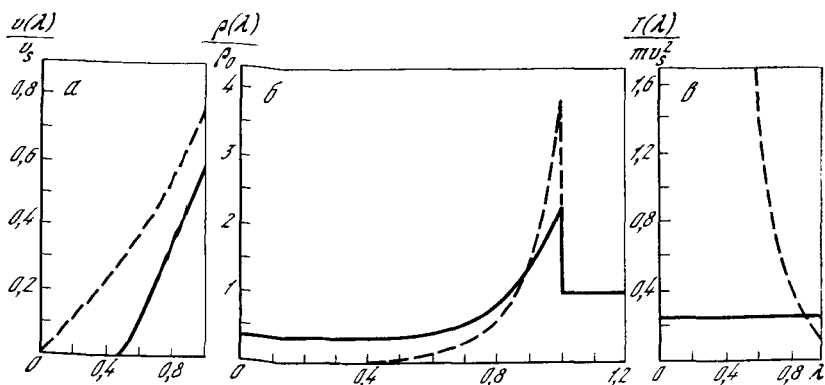


Рис. 9.2. Распределения скорости (а), плотности (б) и температуры (в) за фронтом изотермической ударной волны, распространяющейся в однородной среде [382] (для сравнения штриховыми кривыми показаны соответствующие параметры адиабатического решения)

Скорость фронта ударной волны $v_s(t) = \dot{R}_s(t)$. Граничные условия, определяющие параметры течения непосредственно за фронтом ударной волны, имеют вид

$$\rho_2 = \theta \rho_0, \quad (9.81)$$

$$v_2 = \frac{\theta - 1}{\theta} v_s, \quad (9.82)$$

$$T_2 = m \frac{\theta - 1}{\theta^2} v_s^2; \quad (9.83)$$

здесь m — масса частицы среды, а параметр θ подлежит определению. Течение в возмущенной области описывается системой уравнений

$$\partial_t \rho + \partial_r(\rho v) + 2r^{-1} \rho v = 0, \quad (9.84)$$

$$\partial_t v + v \partial_r v + (T_2/m) \partial_r \ln \rho = 0, \quad (9.85)$$

$$\partial_r T = 0. \quad (9.86)$$

После введения переменных

$$\lambda = r/R_s, \quad v(r, t) = v_2 f(\lambda), \quad \rho(r, t) = \rho_2 g(\lambda)$$

система уравнений (9.84)—(9.86) с граничными условиями сводится к автомодельной задаче. Анализ этой задачи при $\omega = 0$ выполнил Коробейников [102]. В неоднородном случае $\omega \neq 0$ решение задачи дано Солинджером и др. [382]. Мы ограничимся здесь, однако, лишь иллюстрацией поведения параметров решения изотермической задачи в однородной среде по сравнению с адиабатическим решением (рис. 9.2).

Основные особенности изотермического решения в неоднородной среде при $0,04 < \omega < 3$ качественно соответствуют изобра-

женному на рис. 9.2 решению. Расчет [382] дал значение $a = 3,243$, $\theta = 2,378$. В работе [299] поставлен вопрос об устойчивости автомодельных изотермических решений, нуждающийся в дальнейших исследованиях.

Наряду с неоднородностями плотности, распределенными по закону (9.79), которые реализуются, например, при взрыве звезды в среду, заполненную звездным ветром, в астрофизических условиях могут встречаться другие распределения.

Задача о сильном взрыве в среде с неоднородностями плотности в виде облаков. Наличие плотных облаков на фоне однородной среды приводит к целому ряду эффектов, сопровождающих распространение ударной волны. Это отражение ударной волны, сжатие, деформация и ускорение облаков, наконец, испарение облаков в горячем газе за фронтом ударной волны. В этом пункте мы остановимся на влиянии испарения облаков на закон движения ударного фронта. Другие эффекты будут рассмотрены в последующих разделах и в гл. 10. Испарение облаков в горячем газе возмущенной области приводит к притоку газа, перераспределению плотности и т. п. [314]. В данном случае имеется несколько размерных параметров, не позволяющих определить закон движения фронта из соображений размерности. Поэтому запишем динамические уравнения для нахождения $R_s(t)$, следуя работе [314]. За исходные принимаем следующие упрощающие предположения (основанные на результатах автомодельного изотермического решения): а) распределения температуры и плотности однородны в возмущенной области; б) тепловая энергия газа ε_{th} сохраняется в возмущенной области, т. е. отсутствует заметное высвечивание; в) изотермическая скорость звука за фронтом ударной волны пропорциональна скорости фронта:

$$v_s = \beta_0 c_T. \quad (9.87)$$

Скорость испарения облаков $\dot{M}_{ev} = bT^{5/2}$ [314], где b — постоянная, зависящая от радиуса облака и косвенно учитывающая магнитные поля, турбулентные процессы переноса и т. п. Исходим из сохранения тепловой энергии (высвечиванием пренебрегаем, так как газ разрежен внутри полости):

$$\varepsilon_{th} = 3/2 \rho_2 c_T^2 V; \quad (9.88)$$

здесь $V = (4\pi/3) R_s^3$ — объем области. Учтем, что при наличии эффекта испарения облаков полная масса возмущенной области M увеличивается как за счет притока вещества через фронт, так и за счет внутреннего источника — облаков, концентрация которых равна N_{cl} :

$$dM/dt = 4\pi R^2 \rho_0 v_s + N_{cl} \dot{M}_{ev} V, \quad (9.89)$$

уравнение (9.89) перепишем с учетом (9.87)

$$\frac{dM}{dR} = 4\pi R^2 \rho_0 + \frac{N_{cl} \dot{M}_{ev}}{\beta_0 c_T} \left(\frac{4\pi}{3} R_s^3 \right). \quad (9.90)$$

Поскольку $T \sim \varepsilon_{th}/M$, уравнение (9.90) после введения переменной $x = R_s/R_{es}$ и величины $M_1 = (4\pi/3) R_{es}^3 \rho_0$ имеет вид

$$dM/dx = 3M_1 x^2 + 4/3 M_1 (M_1/M)^2 x^3. \quad (9.91)$$

Величина R_{es} имеет смысл радиуса фронта в момент, когда масса вещества, сгребенная из окружающей среды, сравнивается с массой испарившегося вещества. Выражение для R_{es} через параметры задачи можно найти в оригинальной работе [314]. Мы здесь лишь отметим, что $R_{es} \sim \varepsilon^{2/3} n_0^{-3/5}$. Из уравнения (9.91) легко убедиться, что на ранних стадиях, когда доминирует испарение в горячем газе, т. е. при $x \ll 1$

$$M = M_1 x^3 + M_1 x^{4/3}. \quad (9.92)$$

Отсюда в силу $M/M_1 = n_2 R_s^3 / (n_0 R_{es}^3)$ получим, что

$$n_2/n_0 = 1 + x^{-3/5}, \quad x < 1. \quad (9.93)$$

Показатель степени α_e закона движения фронта $R_s \sim t^{\alpha_e}$ получим, исходя из соотношений (9.84), (9.85) и используя $v_s =$

$$= \beta_0 \left(\frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{th}}{\rho_2 V} \right)^{1/2}, \quad \text{заметив, что } v_s \sim R_s^{\frac{\alpha_e - 1}{\alpha_e}}.$$

Отсюда, подставив зависимость n_2 от R_s , из (9.93), имеем, что $\alpha_e = 3/5$ [314]. Таким образом, на ранней стадии эволюции ударной волны в системе с неоднородностями в виде облаков имеет место режим расширения фронта:

$$R_s \sim t^{3/5}, \quad v_s \sim t^{-2/5}. \quad (9.94)$$

В дальнейшем по мере увеличения x режим расширения переходит в автомодельный (9.58).

Закон движения ударной волны на стадии формирования плотной оболочки за фронтом ударной волны. При $R \gg R_{es}$ эффект испарения становится несущественным, основной приток массы в возмущенную область осуществляется за счет потока вещества через фронт ударной волны. Ранее мы убедились, что вещество в возмущенной области имеет тенденцию к формированию оболочки за фронтом ударной волны (см. распределение плотности на рис. 9.1). В этих условиях при наличии механизма отвода тепла в форме излучения (при этом нарушается адиабатичность системы) образуется холодная плотная оболочка, динамика которой и определяет закон движения фронта ударной волны. В возмущенной области на этой стадии можно выделить две области: упомянутую выше оболочку, где сосредоточена основная масса, и горячую разреженную каверну с приблизительно однородным давлением внутри. Однородность давления в каверне обусловлена тем, что время прохождения каверны звуковой волной много меньше времени эволюции системы. Для описания закона движения фронта теперь можно использовать следующие соотношения [12]:

$$1) \text{ условие адиабатичности газа в каверне (но не в оболочке!)} \\ \varepsilon_{th} = PV/(\gamma - 1), \quad \dot{\varepsilon}_{th} = -4\pi R^2 P \dot{R}; \quad (9.95)$$

2) уравнения баланса радиального импульса оболочки

$$d(M\dot{R})/dt = 4\pi R^2 P; \quad (9.96)$$

3) предположение о том, что на этой стадии вся масса остатка равна массе однородной среды, которая была изначально в сфере радиуса R_s :

$$M = (4\pi/3) R_s^3 \rho_0. \quad (9.97)$$

Исключая последовательно из уравнений (9.95)—(9.97) переменные P и M , получим уравнение для R_s [12]:

$$d^2 R_s^4 / dt^2 = k_0 / R_s^3, \quad (9.98)$$

где k_0 — постоянная, зависящая от параметров задачи.

Уравнение (9.98) легко интегрируется, его асимптотическое решение имеет вид [12]

$$R_s(t) = [147\alpha\epsilon R_c^2 t^2 / (4\pi\rho_0)]^{1/7} \sim t^{2/7}, \quad (9.99)$$

где R_c — некоторая постоянная.

Итак, мы рассмотрели эволюцию ударных волн и возмущенного ими газа в задачах об импульсном выделении энергии. Приложение этой теории к описанию остатков сверхновых звезд в межзвездной среде мы обсудим в разд. 10.2. Здесь заметим, что автомодельным решением можно описать распространение ударной волны, являющейся границей сильного звездного ветра и межзвездной среды [2, 400]. Пусть в момент $t = 0$ в среде с плотностью ρ_0 включается сферически-симметричный постоянный источник кинетической энергии, обладающий «механической светимостью» L :

$$L = \dot{M}v_w^2/2, \quad (9.100)$$

где v_w — радиальная скорость разлета звездного ветра. В этом случае анализ размерностей приводит к следующему закону движения фронта ударной волны:

$$R_s(t) = (aLt^3/\rho_0)^{1/5} \sim t^{3/5}. \quad (9.101)$$

Детальный анализ параметров течения за фронтом ударной волны требует последовательного учета теплопроводности, а на поздних стадиях и радиационных потерь энергии оболочки; это выполнено в работе [400]. До настоящего момента мы рассматривали распространение сильных ударных волн и сопутствующие им течения. Обратимся теперь к задачам о распространении слабых ударных волн.

Асимптотическое решение задачи о распространении слабых ударных волн. Описание эволюции ударных волн малой амплитуды, впервые выполненное Ландау [108], можно провести посредством учета слабой нелинейности на фоне решения линеаризованной задачи [131, 162]. Особый интерес представляет задача об определении закона убывания амплитуды слабой ударной волны в отсутствие внешних взаимодействий. В частности, этим законом

описываются асимптотическое поведение ударных волн от взрывов, эволюция ударных волн, образующихся в результате распада произвольного разрыва, отражения от плотных препятствий и т. п. Введем безразмерную амплитуду слабой ударной волны:

$$z = (P_2 - P_0)/\rho_1 c_{s1}^2. \quad (9.102)$$

Использование малости скачков энтропии и инварианта Римана на фронте слабой ударной волны с $z < 1$ (эти скачки третьего порядка малости $\sim O(z^3)$) позволяет получить следующие асимптотические зависимости [131, 162]:

$$z \sim \eta^{-1/2} \quad (\text{плоская ударная волна}), \quad (9.103)$$

$$z \sim \eta^{-3/4} \quad (\text{цилиндрическая ударная волна}), \quad (9.104)$$

$$z \sim \eta^{-1} (\ln \eta)^{-1/2} \quad (\text{сферическая ударная волна}) \quad (9.105)$$

(η — безразмерная координата фронта).

В заключение раздела рассмотрим автомодельные решения уравнений КдФ. Как уже отмечалось ранее, оно применимо к модельному описанию формирования структуры фронта ударной волны.

Автомодельные решения уравнения Кортевега—де Фриса. Выше в этом разделе мы рассмотрели автомодельные описания распространения ударных волн. При этом использовались автомодельные решения первого типа, у которых показатель автомодельной переменной можно определить из соображений размерности и законов сохранения. Сейчас мы рассмотрим пример автомодельного решения второго типа [10], который тесно связан с решениями уравнения КдФ, приведенными в разд. 9.1. Рассмотрим уравнение КдФ вида

$$\partial_t u + u \partial_x u + \beta \partial_{xxx} u = 0 \quad (9.106)$$

с начальным условием $u(x, t = 0) = u_0(x)$. Введем, следуя [10], новые переменные $x = \ln \eta$, $t = \ln \tau$. Уравнение (9.106) перепишем так:

$$\tau \partial_\tau u + \eta u \partial_\eta u + \beta (\eta^3 \partial_{\eta\eta\eta} u + 3\eta^2 \partial_{\tau\eta}^2 u + \eta \partial_\eta u) = 0. \quad (9.107)$$

Солитонное решение (частное решение уравнения (9.107)) в переменных η и τ имеет вид

$$u = 12\alpha [2 + \lambda^{V\alpha/\beta} + \lambda^{-V\alpha/\beta}]^{-1}, \quad (9.108)$$

автомодельная переменная $\lambda = \eta/(B\tau^\alpha)$, где B — постоянная.

Решение начальной задачи Гарднера и др. в соответствии с результатами работы [10] можно представить в автомодельной форме при $\tau \gg 1$ и $\eta \gg 1$:

$$u \sim \sum_{n=1}^N 12\alpha_n \left[2 + \left(\frac{\eta}{B_n \tau^{\alpha_n}} \right)^{V\alpha_n/\beta} + \left(\frac{\eta}{B_n \tau^{\alpha_n}} \right)^{-V\alpha_n/\beta} \right]^{-1}. \quad (9.109)$$

Показатель автомодельной переменной α_n определяется через начальное условие $u_0(x)$ следующим образом:

$$\alpha_n = 2/3 |\mu_n|,$$

где μ_n — дискретные собственные значения уравнения типа Шрёдингера с потенциалом $u_0(x)$ (см. [254]), которое имеет вид

$$\psi''_{xx} + (6\beta)^{-1} [\mu + u_0(x)] \psi = 0 \quad (9.110)$$

при условии $\psi(\pm\infty) \rightarrow 0$.

Данный пример наглядно показывает, что в автомодельных решениях второго типа определение показателя α может быть выполнено лишь посредством решения задачи на собственные значения, поставленной в соответствие решаемой задаче. Другим примером автомодельного решения второго рода является известное решение задачи Гудерлея о сходящейся ударной волне [162]. Более подробные сведения об автомодельных решениях второго рода и промежуточных асимптотиках читатель может почерпнуть в книге [10].

9.3. Взаимодействие ударных волн со слабыми и сильными неоднородностями

Рассмотрим эффекты, сопутствующие распространению ударной волны по среде, в которой на однородном, стационарном фоне имеется ансамбль произвольных возмущений малой амплитуды. Любое малое возмущение в рамках газодинамики может быть представлено в линейном приближении в виде суперпозиции трех мод: звуковой, вихревой и энтропийной. Поэтому нам необходимо рассмотреть взаимодействие ударной волны с тремя типами возмущений, перечисленными выше, составляющими в линейном приближении полный набор собственных мод однородной, стационарной среды. Звуковые волны представляют собой продольные адиабатические колебания скорости δv_s , давления δP_s и плотности среды $\delta \rho_s$, распространяющиеся со скоростью звука c_s относительно системы покоя среды. Вихревые моды — поперечные возмущения скорости среды, покоящиеся относительно нее. Энтропийные моды связаны с возмущением энтропии, плотности, температуры и т. п., давление среды в энтропийной моде не возмущено. Так же как и вихревые возмущения, энтропийные моды не имеют фазовой скорости распространения относительно неподвижной среды, а переносятся движением среды. Более подробное обсуждение перечисленных особенностей мод в рамках магнитной газодинамики дано в разд. 2.2.

Взаимодействие линейных мод с фронтом плоской стационарной ударной волны можно выполнить на основе анализа законов сохранения [14, 73, 100, 315, 316]. Выбираем систему отсчета, связанную с покоящимся возмущенным фронтом ударной волны (предполагаем для простоты, что в невозмущенной ударной волне вектор скорости газа перпендикулярен поверхности фронта).

Линеаризуя потоки сохраняющихся на фронте ударной волны величин (см. разд. 2.6) по малым амплитудам возмущений, получим следующую систему уравнений:

$$\{\rho \delta v_n + v_n \delta \rho\} = 0, \quad (9.111)$$

$$\{\delta P + 2\rho v_n \delta v_n + v_n^2 \delta \rho\} = 0, \quad (9.112)$$

$$\{\delta v_t\} = 0, \quad (9.113)$$

$$\{\delta w + v_n \delta v_n\} = 0. \quad (9.114)$$

Скобки в уравнениях (9.111)—(9.114) обозначают разность $\{A\} = A_1 - A_2$ величин, взятых непосредственно перед фронтом (индекс 1) и за фронтом ударной волны (индекс 2). Здесь w — энтальпия единицы массы среды; индексы n и t означают проекции на нормальное и касательное направления к поверхности возмущенного фронта (локальные). Далее, в (9.111)—(9.114) выражаем возмущения δP через амплитуду звуковых волн, δv через амплитуды звуковых и вихревых возмущений, а $\delta \rho$ как суперпозицию звуковых и энтропийных мод. Амплитуды δP_s , $\delta \rho_s$ и δv_s связаны между собою посредством соотношений

$$\delta P_s = c_s^2 \delta \rho_s, \quad \delta v_s = \frac{\delta P_s}{\rho c_s} \frac{k}{k}. \quad (9.115)$$

В среде, движущейся со скоростью v , законы дисперсии звуковых и энтропийно-вихревых мод имеют соответственно вид

$$\omega_s - k_s v = \pm c_s k, \quad \omega_{e,r} - k_{e,r} v = 0. \quad (9.116)$$

Наконец, необходимо иметь в виду, что законы сохранения (9.111)—(9.114) справедливы локально в системе покоя возмущенного фронта. Поэтому проектировать векторные величины в (9.111)—(9.114) надо на нормаль к возмущенному фронту, которая в системе координат, связанной с невозмущенным плоским фронтом, имеет вид $n = (1, k_y \delta D / \omega, 0)$. Здесь ось x направлена вдоль нормали невозмущенного фронта, волновой вектор k падающего на фронт малого возмущения с частотой ω имеет две компоненты $(k_x, k_y, 0)$, а δD — нормальная составляющая амплитуды скорости возмущения фронта. Амплитуда δD должна быть выражена через амплитуду падающего возмущения в процессе решения системы уравнений (9.111)—(9.114) с учетом (9.115), (9.116) и законов преломления малых возмущений на поверхности фронта ударной волны. Законы преломления возмущений на фронте ударной волны получаются из уравнений

$$\omega_1 = \omega_2, \quad k_{y1} = k_{y2}, \quad (9.117)$$

которые выражают непрерывность частоты волн (с учетом эффекта Доплера) и проекций волновых векторов на плоскость фронта, записанных для каждой из мод. Индексы 1 и 2 здесь определены, как и ранее.

Особенность законов преломления для возмущений, переходящих из среды, движущейся со сверхзвуковой скоростью $v_1 > c_{s1}$, в среду с $v_2 < c_{s2}$, заключается в наличии явления «полного внутреннего преломления» звуковых волн. Если угол θ падения возмущения в виде плоской волны на фронт, отсчитываемый от нормали, превышает некоторое критическое значение θ_c , то звуковая волна, сформированная за фронтом ударной волны, вырождается в поверхностную [100, 315], экспоненциально затухая в глубь области 2. Систему уравнений (9.111)–(9.114), используя (9.115)–(9.117) и указанные выше особенности процесса взаимодействия мод с фронтом ударной волны, можно привести [315] к системе трех линейных неоднородных алгебраических уравнений вида

$$\hat{\Gamma}_{ij} X_j = Y_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.118)$$

где столбец величин $X_j \equiv (\delta P_2, \delta v_{2r}, \delta D)$, по индексу j предполагаем суммирование. Величина δv_{2r} представляет собой амплитуду вихревой волны, связанную с вектором $\delta v_{2r} = \frac{\delta v_{2r}}{k_{2r}} (-k_{2ry}, k_{2rx})$.

Матрица $\hat{\Gamma}_{ij}$ имеет следующий вид:

$$\hat{\Gamma}_{ij} = \begin{vmatrix} c_{s2}^{-1} (\alpha_s + M_2 c_{s2}^2 Q) & -\rho_2 \beta_r & \{\rho\} \\ 1 + 2\alpha_s M_2 + c_{s2}^2 M_2^2 Q & -2j_n \beta_r & 0 \\ (\rho_2 c_{s2})^{-1} \beta_s & \alpha_r & k_y \{v_x\} \omega^{-1} \end{vmatrix}. \quad (9.119)$$

Здесь $\alpha_{s,r} = k_{2x,s,r}/k_{2s,r}$ — косинусы углов с нормалью \mathbf{n} волновых векторов звуковой и энтропийно-вихревой мод, генерированных за фронтом ударной волны (в области 2); $\beta_{s,r} = k_{2y,s,r}/k_{2s,r}$; $Q = (\partial \rho_2 / \partial P_2)_N$ (индекс N указывает на то, что производная взята на адиабате Гюгонио); $M_2 = v_2 / c_{s2}$; $j_n = \rho v_n$ — сохраняющийся поток вещества.

Столбец Y_i с компонентами Y_1, Y_2, Y_3 определяется параметрами исходных возмущений перед фронтом (которые мы полагаем плоскими монохроматическими волнами) и свойствами ударной волны:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \delta P_1 (v_1 / c_{s1}^2 - v_2 \Pi) + \rho_1 \delta v_{1rx} + a_1 \delta s_1 (v_1 - W v_2), \\ Y_2 &= \delta P_1 (1 + M_1^2 - c_{s2}^2 M_2^2 \Pi) + 2j_n \delta v_{1rx} + a_1 \delta s_1 (v_1^2 - W v_2^2), \\ Y_3 &= \delta v_{1ry}, \end{aligned} \quad (9.120)$$

где $\Pi \equiv (\partial \rho_2 / \partial P_2)_N + c_{s1}^{-2} (\partial \rho_2 / \partial \rho_1)_N$, $W \equiv (\partial \rho_2 / \partial \rho_1)_N$, $a_1 \equiv (\partial \rho_1 / \partial s_1)_P$. Отметим здесь, что в (9.120) можно учесть и возможность взаимодействия со звуковыми волнами, падающими из области 2, но для упрощения мы этот эффект здесь не обсуждаем (см. [315]). Решение системы алгебраических уравнений (9.118) определяет амплитуды всех трех мод плоских волн, формирующихся в области 2 в результате взаимодействия произвольного малого возмущения вида плоской волны с фронтом ударной волны произвольной силы в среде с уравнением состояния весьма общего

вида (последнее входит в адиабату Гюгонио). Совместно с законами преломления волновых векторов мод (9.117) это дает решение поставленной задачи, так как всякое исходное малое возмущение может быть представлено как суперпозиция плоских волн трех типов, рассмотренных выше. Если $\det \hat{\Gamma} \neq 0$, решение системы (9.118) можно представить в виде

$$X_i = \hat{\Gamma}_{ij}^{-1} Y_j. \quad (9.121)$$

Здесь необходимо отметить, что нули $\det \hat{\Gamma}$ определяют условия «спонтанного излучения звука» фронтом ударной волны, так как при этом условии есть нетривиальное решение (9.118) при $Y_j \equiv 0$. Данный эффект, указанный Дьяковым, играет существенную роль в проблеме устойчивости ударных волн [112]. Выражение для матрицы $\hat{\Gamma}_{ij}^{-1}$ весьма громоздко, поэтому мы не будем его здесь приводить. Дадим необходимые для дальнейшего (см. разд. 9.4) результаты расчета взаимодействия в идеальном газе сильной ударной волны ($M_1 \gg 1$) с энтропийной флуктуацией плотности вида $\delta\rho_1(\mathbf{k}_1) \exp(ik_1 r)$ [31]. Ряд других частных случаев весьма подробно рассмотрен в [100, 315].

Проекция на нормаль амплитуды скорости смещения фронта δD в этом случае имеет вид

$$\delta D = v_1 \frac{\delta\rho_1}{\rho_1} g^{-1}(k_{1x}, k_{1y}), \quad (9.122)$$

где

$$g(k_{1x}, k_{1y}) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{M_2} \left(1 - \frac{\text{tg}^2 \vartheta}{\text{tg}^2 \vartheta_c}\right)^{1/2}, & \vartheta \leq \vartheta_c, \\ 2 - \frac{i}{M_2} \frac{k_{1x}}{|k_{1x}|} \left(\frac{\text{tg}^2 \vartheta}{\text{tg}^2 \vartheta_c} - 1\right)^{1/2}, & \vartheta > \vartheta_c. \end{cases} \quad (9.123)$$

Амплитуда флуктуации давления в звуковой волне за фронтом (область 2)

$$\delta P_2 = P_2 [1 - 2g^{-1}(k_{1x}, k_{1y})] \delta\rho_1/\rho_1. \quad (9.124)$$

Проекция на нормаль (ось x) амплитуды скорости вихревой волны, генерированной за фронтом:

$$\delta v_{2rx} = v_2 \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\delta\rho_1}{\rho_1} g^{-1}(k_{1x}, k_{1y}). \quad (9.125)$$

Здесь γ — показатель адиабаты идеального газа. Возвращаясь к выражению (9.122) для δD , отметим, что при $\vartheta < \vartheta_c$ отношение $\delta D/v_1$ имеет тот же знак, что и $\delta\rho_1$. Это означает, что фронт прогибается под действием сгущений плотности и вытягивается под действием разрежений. Если, однако, угол падения превышает критический $\vartheta > \vartheta_c$, то имеет место сдвиг фазы $\Delta\varphi$ между падающим возмущением плотности и возмущением скорости фронта:

$$\Delta\varphi = \text{arctg} \left[\frac{(\text{tg}^2 \vartheta / \text{tg}^2 \vartheta_c - 1)^{1/2}}{2M_2} \right]. \quad (9.126)$$

Критический угол ϑ_c определяется в данном случае соотношением

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_c = (\gamma + 1)/(\gamma - 1). \quad (9.127)$$

Для ударной волны в среде с произвольным уравнением состояния имеем

$$\operatorname{tg}^2 \vartheta_c = v_1^2/(c_{s2}^2 - v_2^2). \quad (9.128)$$

Явление «полного внутреннего преломления» звуковых волн за фронтом, которое имеет место, если исходное возмущение имело угол падения $\vartheta > \vartheta_c$, приводит к тому, что при $\vartheta \rightarrow \pi/2$ $|\delta D| \rightarrow 0$, а амплитуда изгиба остается конечной (см. (9.122), (9.123)). Итак, мы обсудили взаимодействие ударных волн со слабыми неоднородностями, приводящее к линейной трансформации газодинамических мод на фронте и искажению самого фронта ударной волны. Значительный интерес для астрофизических приложений представляют эффекты взаимодействия ударных волн с сильными возмущениями — разрывами различных типов [92, 384, 273].

Взаимодействие ударных волн с сильными неоднородностями, разумеется, не может быть описано в рамках теории возмущений по амплитуде неоднородностей, а требует других подходов. Развита методика решения задач о движении ударных волн в трубках переменного сечения [162], дифракция ударных волн на препятствиях различной формы [112, 162], пересечения разрывов и отражения ударных волн [112, 131, 162, 270]. Мы здесь приведем лишь результаты исследования отражения ударных волн от плоских препятствий, которые затем будут использованы в разд. 10.3. Задача о взаимодействии ударной волны с границей раздела двух сред, обладающих различной плотностью, в однородном случае сводится к классической задаче о распаде произвольного разрыва [112]. Пусть ударная волна распространяется по среде с плотностью ρ_0 в направлении плоской границы со средней плотностью ρ_1 . Считаем, что граница раздела двух сред находится в состоянии равновесия по давлению (контактный разрыв). В момент столкновения ударной волны с контактной поверхностью возникает произвольный разрыв, который распадается на устойчивые конфигурации. Если имеет место соотношение

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} > \frac{(\gamma_0 + 1)(P_2/P_1) + (\gamma_0 - 1)}{(\gamma_1 + 1)(P_2/P_1) + (\gamma_1 - 1)} \quad (9.129)$$

между давлением в средах P_1 и давлением за фронтом ударной волны P_2 , то в результате столкновения возникают отраженная и прошедшая ударные волны, а также тангенциальный разрыв [112]. Для важного в приложениях предельного случая отражения от твердой стенки сила отраженной ударной волны определяется соотношением

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{(3\gamma - 1)P_2 - (\gamma - 1)P_1}{(\gamma - 1)P_2 + (\gamma + 1)P_1}, \quad (9.130)$$

которое получается, если учесть, что газ за фронтом отраженной волны покоится относительно стенки. Поскольку отношение дав-

ления за фронтом к давлению газа перед фронтом ударной волны связано с числом Маха данной волны посредством равенства

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad (9.131)$$

легко получить, комбинируя (9.130) (9.131), связь числа Маха падающей M_1 и отраженной M_0 :

$$M_0^2 = \frac{\gamma+1}{2\gamma} \left\{ \frac{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)](3\gamma-1) - (\gamma^2-1)}{[2\gamma M_1^2 - (\gamma-1)](\gamma-1) + (\gamma+1)^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right\}. \quad (9.132)$$

Особенностью этого соотношения является конечное предельное значение M_0^2 при увеличении силы падающей волны. В частности, в одноатомном идеальном газе предельная величина силы отраженной волны соответствует $M_0^2 = 5$. Отражение ударных волн от плотных препятствий можно использовать для модельного описания взаимодействия ударных волн в межзвездной среде с облаками [384, 273]. Здесь представляют интерес несколько задач. Во-первых, генерация отраженной волны; во-вторых, диссипация энергии первичной ударной волны, взаимодействующей с облаком и т. п. Применение описанных выше одномерных результатов к описанию взаимодействия ударных волн с межзвездными облаками может быть оправдано в случае облаков в форме листов, что, по утверждению ряда авторов, является скорее правилом, чем исключением (см., в частности, обзор [311] и статьи в сборнике, упомянутом в ссылке [265]).

9.4. Распространение ударных волн в случайно-неоднородной среде

В предыдущих разделах мы обсуждали эффекты, связанные с распространением ударных волн в средах с регулярными неоднородностями. Однако многие задачи газодинамики, физики плазмы и астрофизики приводят к необходимости рассмотрения динамики ударных волн в турбулизованных средах. В этом разделе мы исследуем эволюцию фронта сильной ударной волны, распространяющейся в среде со слабыми флуктуациями плотности, которые могут быть реализованы случайными ансамблями энтропийных и звуковых возмущений [26, 31]. Для сильной ударной волны с $M_1 \gg 1$ всякое малое возмущение плотности может рассматриваться как энтропийное возмущение с точностью до членов порядка $M_1^{-1} \ll 1$. Поэтому ограничимся случаем распространения ударной волны в среде со случайным ансамблем энтропийных волн. В разд. 9.3 показано, что взаимодействие ударной волны со сгущениями и разрежениями плотности приводит к смещениям фронта относительно невозмущенного положения со скоростью δD (см. (9.122) и (9.123)). Поэтому можно ожидать, что при распространении ударной волны в случайно-неоднородной среде будут иметь место случайные смещения участков фронта друг относительно друга

в соответствии с локальным значением плотности. Пусть $\delta X(\mathbf{r}_\perp, t)$ — проекция смещения участка фронта в точке \mathbf{r}_\perp на невозмущенное направление нормали к фронту. Тогда имеем

$$\delta X(\mathbf{r}_\perp, t) = \int_0^t \delta D(\mathbf{r}_\perp, \tau) d\tau. \quad (9.133)$$

Искривление фронта ударной волны будем описывать структурной функцией, характеризующей дисперсию относительных смещений участков фронта:

$$G^2(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp, t) = \langle [\text{Re } \delta X(\mathbf{r}_\perp, t) - \text{Re } \delta X(\mathbf{r}'_\perp, t)]^2 \rangle, \quad (9.134)$$

где усреднение выполнено по ансамблю флуктуаций. Ансамбль флуктуаций плотности считаем статистически однородным и описываем корреляционной функцией вида

$$\langle \delta \rho(\mathbf{k}) \delta \rho^*(\mathbf{k}') \rangle = W(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (9.135)$$

Структурная функция (9.134) с помощью (9.133), (9.122) для спектров (9.135) с азимутальной симметрией относительно нормали к фронту или изотропных приводится к виду

$$G^2(R, t) = \frac{16\pi M_2^2}{\rho_1^2} \int_0^\infty k_\perp [1 - J_0(k_\perp R_\perp)] dk_\perp \int_0^\infty dk_\parallel \times \\ \times \frac{W(k_\parallel, k_\perp) \sin^2(k_\parallel v_1 t / 2)}{\left| \sqrt{k_\parallel^2 - c \text{tg}^2 \theta_c k_\perp^2} + 2M_2 k_\parallel \right|^2}, \quad (9.136)$$

где $R_\perp = |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|$; $J_0(k_\perp R_\perp)$ — функция Бесселя; угол θ_c определен равенствами (9.127), (9.128).

Рассмотрим на основе выражения (9.136) эволюцию дисперсии относительных смещений участков фронта в среде с анизотропным гауссовым распределением флуктуаций плотности (с азимутальной симметрией по отношению к фронту ударной волны):

$$W(k_\parallel, k_\perp) = \frac{l_\parallel l_\perp^2 \langle \delta \rho^2 \rangle}{\pi^{3/2}} \exp(-k_\parallel^2 l_\parallel^2 - k_\perp^2 l_\perp^2). \quad (9.137)$$

Тогда при $l_\parallel < l_\perp$ имеем следующие режимы эволюции фронта:

$$G(R_\perp, t) \simeq \frac{4M_2 l_\parallel \sqrt{\langle \delta \rho^2 \rangle}}{\rho_1} F(t) \begin{cases} R_\perp / l_\perp, & R_\perp \leq l_\perp, \\ 1, & R_\perp > l_\perp, \end{cases} \quad (9.138)$$

где временная зависимость определяется соотношением

$$F(t) = \begin{cases} v_1 t / l_\parallel, & t < l_\parallel / v_1, \end{cases} \quad (9.139)$$

$$F(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{v_1 t}{l_\parallel}}, & \frac{l_\parallel}{v_1} < t < \frac{l_\perp \text{tg } \theta_c}{v_1}, \end{cases} \quad (9.140)$$

$$F(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{l_\perp \text{tg } \theta_c}{l_\parallel}}, & t > \frac{l_\perp \text{tg } \theta_c}{v_1}. \end{cases} \quad (9.141)$$

Режим (9.139) реализуется, поскольку вклад в рост дисперсии от флуктуаций с большими k_{\parallel} мал, а крупномасштабные флуктуации с $k_{\parallel} l_{\parallel} < 1$ на малых временах проявляют себя как регулярные неоднородности. После прохождения фронтом нескольких продольных длин корреляции устанавливается режим «диффузионного» роста дисперсии (9.140). Данный режим соответствует росту дисперсии при случайных смещениях статистически независимых участков фронта. Однако на временах $t \sim l_{\perp} \operatorname{tg} \vartheta_c / v_1$ диффузионный рост дисперсии прекращается — наступает режим насыщения, определяющий устойчивость фронта по отношению к диффузионному размытию. Механизм насыщения связан с формированием через промежуток времени $t \sim l_{\perp} \operatorname{tg} \vartheta_c / v_1$ стационарного, статистически однородного потока звуковых волн, распространяющихся вдоль фронта ударной волны в возмущенном газе. Флуктуация плотности с $k_{\perp} \neq 0$ (именно они ответственны за относительные смещения участков фронта), кроме деформации фронта в точке g_{\perp} , генерирует звуковую волну за фронтом.

Для флуктуаций с $|k_{\perp}/k_{\parallel}| > \operatorname{tg} \vartheta_c$ соответствующая звуковая волна распространяется лишь вдоль фронта и экспоненциально затухает в глубь возмущенной области. При этом $\operatorname{tg} \vartheta_c$, характеризующий относительную долю волн, преломленных вдоль фронта, зависит от свойств среды и интенсивности ударной волны (9.128). Сформированный таким образом поток звуковых волн переносит возмущения (деформацию) вдоль фронта ударной волны, что и приводит к насыщению роста дисперсии. Следует заметить, что распространение возмущений вдоль фронта играет важную роль также и в нелинейной теории устойчивости ударных волн [162]. При распространении сильной волны и анизотропной турбулентности с гауссовым спектром и при условии малости длины поперечной корреляции $l_{\parallel} \gg l_{\perp}$ имеют место режимы эволюции фронта (рис. 9.3, а). Отметим здесь отсутствие режима «диффузионного» размытия фронта. Для простоты считаем, что газ идеальный с показателем адиабаты $5/3$, тогда для сильной волны $\operatorname{tg} \vartheta_c = 2$.

Особый интерес представляет эволюция фронта ударной волны в среде с изотропной турбулентностью, имеющей степенной спектр. В частности, такая ситуация может иметь место в межзвездной среде и солнечном ветре. В связи с этим приведем на рис. 9.3, б результаты анализа дисперсии относительных смещений участков фронта ударной волны, распространяющейся в среде со спектром вида

$$W(k) = \frac{L^3 \langle \delta \rho^2 \rangle \Gamma(\nu/2) \exp(-k^2 l^2)}{\pi^{3/2} \Gamma(\nu/2 - 3/2) (1 + k^2 L^2)^{\nu/2}}, \quad \nu > 3, \quad (9.142)$$

где L — основной масштаб турбулентности; l — внутренний масштаб ($l \ll L$). Можно убедиться на рис. 9.3, б, что в этом случае имеют место режимы, аналогичные диффузионному режиму размытия фронта (9.140), которые (так же как и при гауссовом законе распределения флуктуаций) переходят в режим насыщения. Наличие насыщения роста дисперсии относительных смещений участ-

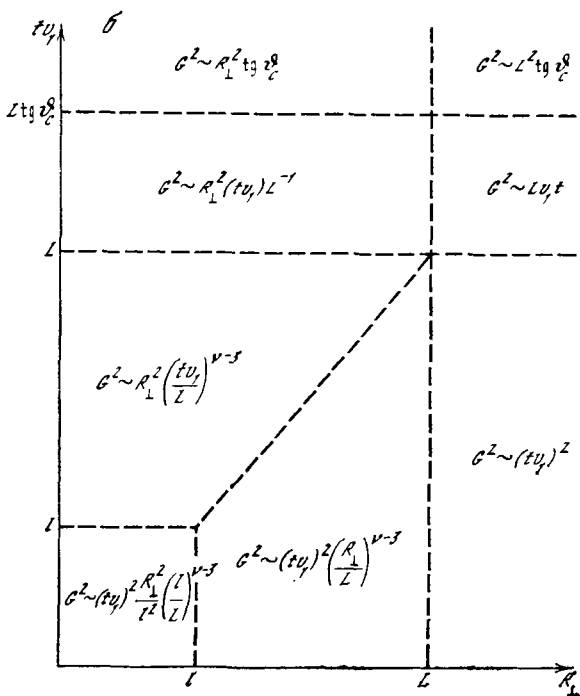
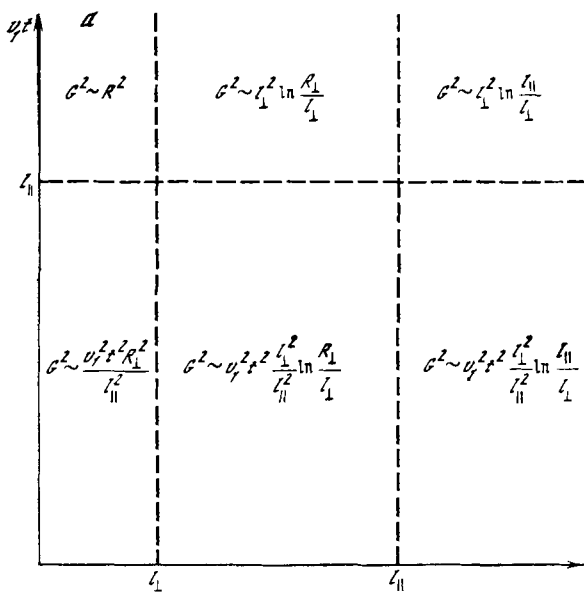


Рис. 9.3. Режимы эволюции фронта сильной ударной волны, распространяющейся в среде с анизотропным гауссовым (а) и с изотропным степенным (б) спектрами флуктуаций плотности

ков фронта обусловлено эффектом «полного внутреннего преломления» волн на фронте и генерацией поверхностных звуковых волн [26, 31].

9.5. Ударные волны и турбулентность в межпланетной среде

В заключительном разделе этой главы приведем основные сведения о различных линейных и нелинейных волнах в межпланетной плазме. Межпланетная среда, кроме самостоятельного интереса, представляет собой уникальную лабораторию, доступную для непосредственных измерений в отличие от далеких астрофизических объектов, в которых в большинстве случаев возможны только косвенные наблюдения плазмы. Поэтому в межпланетном пространстве можно проверять гипотезы и теории, касающиеся поведения менее доступных объектов, таких, как звездные ветры, остатки сверхновых и др.

Общие сведения. Межпланетная плазма существует в виде распространяющегося приблизительно радиально от Солнца потока частиц — солнечного ветра, простирающегося на десятки а. е. Средняя скорость этого потока на расстоянии $10-15R_{\odot}$ достигает значения $400-500$ км/с, которое в дальнейшем слабо изменяется с расстоянием, по-видимому, вплоть до той области, в которой начинается заметное торможение вследствие взаимодействия солнечного ветра с межзвездной средой. Концентрация межпланетной плазмы вблизи орбиты Земли имеет значение около 5 см^{-3} и при радиальном разлете убывает обратно пропорционально квадрату гелиоцентрического расстояния.

В плазму вморожено магнитное поле, крупномасштабная составляющая которого вблизи орбиты Земли имеет значение около $5 \cdot 10^{-5}$ Гс. Согласно последним наблюдательным данным, относящимся к расстояниям от 1 до 20 а. е. и гелиоширотам от -5 до 26° [283а], крупномасштабное поле и особенно его абсолютная величина неплохо описываются моделью Паркера, хотя значения отдельных компонент испытывают значительные флуктуации. Тепловая скорость протонов и альвеновская скорость одного порядка величины, около 50 км/с, так что солнечный ветер представляет собой сверхзвуковой поток ($M \approx 10$) горячей плазмы с $\beta \approx 1$. Более подробные сведения о межпланетной плазме, полученные путем многочисленных измерений на космических аппаратах, можно найти в [161, 396].

Спокойный солнечный ветер с вмороженным в него крупномасштабным магнитным полем, имеющим силовые линии спиральной формы, представляет собой редко реализующуюся идеализированную картину межпланетной среды. Как правило, на этом фоне наблюдаются случайные неоднородности скорости плазмы, ее плотности, температуры, магнитного поля и других параметров. Пространственные масштабы этих неоднородностей образуют очень широкий диапазон — начиная от размера порядка расстояния до Солнца (1 а. е. у орбиты Земли) и кончая малыми масштабами, ха-

раактерными для различных плазменных колебаний (гирорадиусы $r_e \approx 10^5$ см, $r_i \approx 10^7$ см, дебаевская длина $r_D \approx 10^3$ см). Межпланетная плазма, как правило, находится в возбужденном состоянии, поэтому различные МГД-возбуждения, рассмотренные в гл. 2, и многие другие магнитоплазменные структуры либо постоянно в ней присутствуют, либо встречаются достаточно часто. К их числу относятся МГД-волны малой амплитуды — альвеновские и быстрые магнитозвуковые, зитропийные неоднородности, ударные волны, контактные, тангенциальные и вращательные разрывы, различного рода нелинейные волны. Мы приведем здесь лишь краткие сведения об ударных волнах и турбулентности в межпланетной плазме, основанные на наблюдательных (и отчасти теоретических) данных из работ [191—194, 208—213, 240, 246, 279, 328, 360, 402 и др.].

Источники ударных волн. Наиболее мощные ударные волны в межпланетном пространстве генерируются при солнечных вспышках. При этом из короны выбрасывается в среднем около $3,5 \times 10^{16}$ г массы, а начальная энергия ударной волны достигает 10^{32} эрг, что сравнимо с полной энергией солнечной вспышки. Источниками ударных волн могут быть также менее энергичные проявления солнечной активности — эруптивные выбросы плазмы, корональные транзиенты, распад магнитных волокон. Они характеризуются более медленным, чем при вспышках, но более длительным выделением энергии и приводят к ускорению плазмы в короне до скоростей в сотни километров в секунду, иногда до 1000 км/с. Ударные волны генерируются также высокоскоростными потоками солнечного ветра, взаимодействующими с более медленной окружающей плазмой. При этом от области взаимодействия чаще всего отходят две ударные волны: прямая и обратная. Но такие структуры довольно редки на расстояниях до 1 а. е. от Солнца, хотя на больших расстояниях (3—5 а. е.) 90% коротящих областей взаимодействия имеют прямые ударные волны и свыше 70% — обратные ударные волны. Между парами ударных волн располагаются контактные поверхности, отделяющие плазму высокоскоростного потока от ускорившейся плазмы спокойного солнечного ветра. Чаще всего наблюдаются быстрые ударные волны, и лишь в единичных случаях были отождествлены медленные волны.

Во внешней гелиосфере на расстояниях $r \gtrsim 5$ а. е. весьма любопытными структурными образованиями являются «волны плотности» или «волны давления» (см. обзор в [209]). По-видимому, их источниками являются высокоскоростные потоки солнечной плазмы. Но на больших гелиоцентрических расстояниях перепады скорости сглаживаются из-за взаимодействия быстрых и медленных потоков и трансформируются в «волны давления», имеющие длительность 4—5 сут. В таких волнах полное давление $P = n_p T_p + B^2/8\pi$, концентрация плазмы и магнитное поле сильно возрастают:

$$P_{\max}/P_{\min} = 70 \div 150, \quad B_{\max}/B_{\min} = 9 \div 16,$$

$$n_{p\max}/n_{p\min} = 15 \div 25.$$

В настоящее время отсутствует информация о дальнейшей эволюции «волн давления». Из теоретических соображений следует ожидать, что они могут опрокидываться и порождать сильные ударные волны. В любом случае столь сильные возмущения с большим запасом энергии должны оказывать заметное влияние на всю динамику внешней гелиосферы.

Разнообразные типы стационарных ударных волн возникают при взаимодействии солнечного ветра с планетами и кометами. Здесь выделяется несколько различных случаев: а) планета имеет собственное магнитное поле и атмосферу (Земля, Юпитер); б) планета имеет магнитное поле, но не имеет атмосферы (Меркурий); в) есть атмосфера, но нет собственного магнитного поля (Венера, кометы). О свойствах ударной волны при взаимодействии солнечного ветра с кометой см. [55a].

Свойства межпланетных ударных волн. В межпланетном пространстве наиболее часто регистрируются ударные волны умеренной силы: число Маха (звуковое или альвеновское) имеет значения 1,5—3. Однако сильные солнечные вспышки порождают и весьма сильные ударные волны [159], например в событии 4 августа 1972 г. скорость ударной волны относительно космических аппаратов достигла значения 2800 км/с, что соответствует $M \gg 1$. Начальная скорость вспыхивающих ударных волн в короне определяется по частотному дрейфу радиовсплесков II типа. Как правило, начальная скорость выше той, которая измеряется на орбите Земли, на далеких гелиоцентрических расстояниях волны заметно замедляются. Однако это замедление происходит неравномерно: основная часть его приходится на близкие к Солнцу расстояния, $r \lesssim 2$ а. е. и даже $r \lesssim 0,8$ а. е. Далее, вплоть до расстояний по крайней мере 16 а. е., ударные волны могут распространяться без заметного замедления [347]. Например, ударная волна от вспышки 28 апреля 1978 г. имела начальную скорость около 1100 км/с; на расстояниях $r \lesssim 1$ а. е. она замедлилась до 960 км/с и далее распространялась с такой скоростью до 16 а. е. (где находился в то время «Пионер-10»); аналогичным образом менялась скорость ударной волны от вспышки 20 марта 1976 г. и других. Ударные волны вспышек, как правило, несферичны: их скорость максимальна в направлении радиуса, проходящего через место вспышки, и уменьшается при отклонении от указанного направления на величину 8—15 км/с на 1° [347].

Толщина фронта ударных волн в большинстве случаев не превышает 2000 км. Пинтер приводит следующую эмпирическую формулу для толщины фронта δ (в км):

$$\delta = 1,36\beta_p^{-1,4}c/\omega_{pp},$$

где ω_{pp} — протонная плазменная частота; $c = 3 \cdot 10^5$ км/с; $\beta_p = 8\pi n_p T_p / B^2$. По-видимому, эта формула относится в первую очередь к квазиперпендикулярным волнам и дает шкалу изменения магнитного поля. В работе [363] приведены сходные результаты: квазиперпендикулярная ($\theta_{Bn} \approx 63^\circ$) ударная волна имела

толщину фронта около 90 км или около $2c/\omega_{pi}$. На этом расстоянии крупномасштабное магнитное поле изменялось по величине от $8,5 \cdot 10^{-5}$ до $15,3 \cdot 10^{-5}$ Гс. Перед фронтом волны отчетливо наблюдался волновой предвестник (осцилляционная структура типа той, которая была описана в разд. 8.6), амплитуда осцилляций убывала экспоненциально на длине 270 км.

Однако наблюдаются и более толстые фронты. Например, квазипараллельная ($\theta_{B, n} = 23^\circ \pm 15^\circ$) ударная волна умеренной силы (числа Маха: альвеновское $M_A = 2,2$, быстрое магнитозвуковое $M_f = 1,27$), наблюдавшаяся 29 января 1978 г. [378], имела различные шкалы для замедления потока плазмы ($\delta_p \approx 7,6 \cdot 10^3$ км) и областей, в которых обнаружены сильные магнитные флуктуации: $\delta_m^+ \approx 5 \cdot 10^5$ км перед фронтом и $\delta_m^- \approx 2,5 \cdot 10^5$ км за фронтом. Несколько масштабов, различных для скачка магнитного поля, электронной и протонной компонент отмечены в квазипараллельной ударной волне 12 ноября 1978 г. [278] и в ряде других случаев.

Межпланетные ударные волны вызывают ускорение частиц и являются источниками надтепловых частиц различных энергий — от 100 эВ до 100 МэВ и даже, по-видимому, до релятивистских энергий. Ускорение частиц электрическим полем ударной волны может происходить и при их однократном взаимодействии с фронтом. Но при этом возможен лишь небольшой прирост энергии: $\Delta \varepsilon \approx \approx r \Delta u$, где Δu — скачок скорости на фронте, и только в квазиперпендикулярных волнах однократное взаимодействие может увеличить энергию частицы в несколько раз [161]. Однако если волна распространяется в турбулентной среде, то становится эффективным еще один механизм ускорения частиц вблизи фронта — фермиевское ускорение I порядка в набегающем потоке турбулентных пульсаций. Эффективность ускорения существенно возрастает за счет многократного пересечения частицей ударного фронта в процессе ее случайных блужданий. Анизотропный поток ускоренных частиц может генерировать альвеновские и другие флуктуации, что усиливает рассеяние частиц вблизи фронта и ускоряет набор энергии.

Ускорение частиц межпланетными ударными волнами регистрировалось неоднократно. В частности, о результатах наблюдений сверхтепловых ионов умеренных энергий, от 100 эВ до 30 кэВ, см. [258]. Большинство исследованных ударных волн как со сверхкритическими, так и с докритическими значениями Маха сопровождалось ускоренными ионами. Функция распределения этих ионов имела степенную форму: $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\gamma}$, изотропную в системе солнечного ветра с показателем $\gamma = 2 \div 3^1$. Ускоренные ионы начали детектироваться по крайней мере за 2 ч до прихода фронта (что соответствует расстоянию от фронта в несколько миллионов километров). Подробная теория ускорения частиц ударными волнами и обзор наблюдательных данных об ускорении в межпланетном пространстве содержатся в [161, 396].

¹ Формирование спектров степенной формы вообще характерно для ускорения на ударных волнах.

Турбулентность межпланетной плазмы. Наблюдательные данные показывают, что распределение скорости, плотности, магнитного поля и других параметров межпланетной плазмы имеет в значительной степени случайный характер: на фоне сравнительно медленно меняющихся крупномасштабных компонент существуют случайные неоднородности различных масштабов, флуктуирующие во времени и в пространстве. При этом системе присущи достаточно стабильные усредненные характеристики плазмы и магнитного поля — корреляционные тензоры различных рангов. Таким образом, можно с полным основанием говорить о турбулентности межпланетной плазмы. Измерение параметров этой турбулентности и ее теоретическое описание составляют одну из важных проблем физики межпланетной среды. Ниже мы приведем некоторые наблюдательные данные о межпланетной турбулентности. Теорию турбулентности во внутренней гелиосфере ($r \lesssim 1$ а. е.) развивали Чашей и Шишов (см., например, [166, 167]).

Многочисленные измерения турбулентных пульсаций, которые проводятся начиная с 1962 г., показывают, что в межпланетном пространстве существуют широкие спектры неоднородностей магнитного поля и скорости плазмы, которые подобны по форме и описываются степенными зависимостями спектральной плотности энергии турбулентности от волнового числа. В интервале масштабов от 10—100 км до $\sim 10^6$ км показатель спектра при различных измерениях принимал значение от 1,2 до 2,0; в последнее время наблюдатели часто приводят колмогоровское значение $5/3$ [210, 213], хотя для этого нет серьезных теоретических оснований. Амплитуда флуктуаций магнитного поля довольно велика — $\delta V \approx \approx (0,3 \div 0,5) V_0$. Преобладающий вклад в турбулентность на расстояниях $r \lesssim 1$ а. е. вносят, по-видимому, альвеновские флуктуации: у них наблюдается значительная корреляция между δv и δV , и малые флуктуации плотности плазмы и магнитного поля [208], хотя не обязательно плоские альвеновские волны. Вместе с тем вклад в турбулентность вносят также быстрые магнитозвуковые волны и разрывы различного типа. Это находит выражение в том, что плотность плазмы также испытывает флуктуации, причем их спектр подобен спектрам магнитного поля и скорости. В работах [191, 192] изучалась зависимость спектра альвеновских флуктуаций в интервале частот $2,8 \cdot 10^{-4} - 8,3 \cdot 10^{-3}$ Гц от расстояния. При $r = 1 \div 5$ а. е. спектральный индекс был близок к $5/3$, а спектральная мощность изменялась как $r^{-3,5}$. Но в области $r < 1$ а. е. спектральный индекс зависел от расстояния в диапазоне достаточно низких частот ($f < 10^{-2}$ Гц).

Согласно [399a], с расстоянием изменяется и природа флуктуаций: значительную роль при $r > 1$ а. е. (измерения проводились до 10 а. е.) начинают играть области, в которых наблюдается антикорреляция между плотностью числа протонов и абсолютной величиной магнитного поля. Авторы интерпретируют этот результат в пользу существования статистических структур (энтропийных неоднородностей), в которых имеет место баланс полного давления

$P + B^2/8\pi = \text{const}$, но B и ρ испытывают флуктуации. Характерные размеры таких неоднородностей не превышают 10^7 км ($\lesssim 10$ ч).

Важные данные о свойствах крупномасштабных флуктуаций скорости и магнитного поля приведены в работе [213]. По данным «Вояджера-1», полученным в 1977—1980 гг. на расстояниях от 1 до 9 а. е., спектр магнитного поля при частотах $f \lesssim 10^{-4}$ Гц (что соответствует масштабам $l \gtrsim 10^7$ км) с хорошей точностью следует закону $f^{-2,0}$, а спектр флуктуаций скорости описывается зависимостью $f^{-\nu}$, где $\nu = 1,8 \div 2,3$. Показатель спектра $\nu = 2$ свойствен обычно такой турбулентности, главными структурными элементами которой являются разрывы. По-видимому, эти разрывы реализуются коротящими областями взаимодействия, отходящими от них ударными волнами, а также сложными структурами, которые образуются в результате нелинейного взаимодействия этих сильных возмущений. Авторы особо подчеркивают, что наблюдаемую картину невозможно создать небольшим числом сильных разрывов — число их должно быть достаточно велико. Второй важный факт, установленный в [213], — рост основного масштаба турбулентности L_0 (и наибольшего периода флуктуаций T_{max}) с расстоянием. Если флуктуации B имеют на 1 а. е. $T_{\text{max}} \approx 6,5$ сут, что при скорости солнечного ветра $u = 4 \cdot 10^7$ см/с дает основной масштаб $L_0 \approx 1,5$ а. е., то на расстояниях 6,1—8,8 а. е. $T_{\text{max}} \approx 26$ сут, т. е. $L_0 \approx 6$ а. е. Этот факт находит естественное объяснение в линейном росте размеров крупномасштабных магнитоплазменных структур с расстоянием. Уровень спектральной мощности флуктуаций скорости убывает с расстоянием за счет выравнивания скоростей потоков плазмы.

Обращает на себя внимание сходство картины турбулентности в солнечном ветре и в межзвездной среде (см. гл. 10). И в том и в другом случае крупномасштабные флуктуации создаются разрывами, в первую очередь, по-видимому, ударными волнами. В малых масштабах заметный вклад дают МГД-волны малой амплитуды и другие квазилинейные моды. Следует, однако, отметить, что форму спектра крупномасштабных турбулентных флуктуаций нельзя считать окончательно установленной. В недавней работе [210] был получен спектр мощности межпланетного магнитного поля $P(f) \sim f^{-5/3}$ вплоть до $f \approx 3 \cdot 10^{-6}$ Гц, т. е. до масштабов $L \approx 1$ а. е. Первые исследования на космическом аппарате «Маринер-2» в 1962 г. дали спектральный индекс в крупномасштабной части спектра, близкий к единице. Поэтому как форма спектра, так и природа турбулентных структур, особенно во внешней гелиосфере, требуют дальнейшего изучения.

Турбулентность солнечного ветра неоднородна не только на шкале порядка расстояния до Солнца. Имеются области с повышенным уровнем флуктуаций меньшего масштаба. Это прежде всего области вблизи фронтов межпланетных ударных волн, а также коротящие области взаимодействия и в некоторых случаях области ($\sim 0,1$ а. е.) перед коротящими ударными волнами. В этих местах уровень возмущенности магнитного поля может быть в десятки раз выше, чем в соседних более спокойных областях.

Глава 10. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И ДИНАМИКА МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЫ

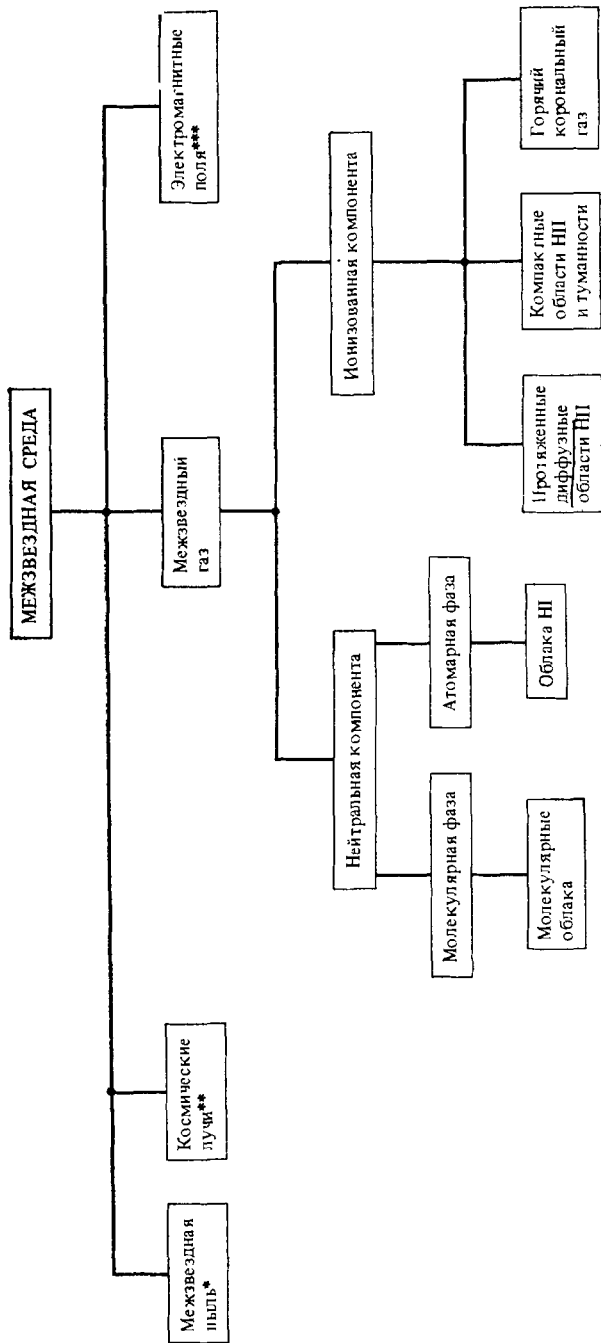
10.1. Структура межзвездной среды

Данный раздел вводит к главе, мы посвятим краткому обзору данных о структуре и динамике межзвездной среды (МЗС). МЗС представляет собой многокомпонентную систему, состоящую из газа, пыли, электромагнитных полей и надтепловых частиц (космических лучей), находящуюся в гравитационном поле галактического диска. Общее представление о структуре МЗС дает схема (рис. 10.1), которая является модификацией схемы, предложенной Йорке [406]. В настоящее время активно ведутся исследования МЗС и накоплен значительный объем наблюдательной информации о всех компонентах МЗС, указанных на рис. 10.1, детальный анализ которых дан в монографиях [93, 17] и обзорах [311, 226]. Поэтому мы здесь ограничимся лишь некоторыми комментариями к упомянутой схеме.

Молекулярные облака в Галактике [232, 372, 377]. Основные сведения о молекулярных облаках, содержащих значительную долю массы межзвездного газа в форме молекулярного водорода H_2 , получены из наблюдений излучения молекулы CO в диапазоне миллиметровых волн (длина волны 2,6 мм, а частота 115 271,2 МГц). Молекула CO наиболее обильно распространена (после молекулы H_2) и имеет постоянный дипольный момент. Возбуждение основной молекулы CO происходит за счет столкновений с H_2 , если концентрация H_2 достаточна: $n(H_2) \geq 100 \div 300 \text{ см}^{-3}$. Результаты двумерного обзора распределения H_2 в области между галактическим центром и радиусом 16 кпк сводятся к следующему [372, 377].

1. Радиальное распределение H_2 имеет резкий пик в центральной части Галактики $R < 1,5$ кпк, минимум при $2 < R < 4$ кпк и второй максимум при $R \approx 6$ кпк, за которым происходит экспоненциальное уменьшение плотности с характерной длиной волны $z_{1/2} \approx 26 \times 2$ кпк. Полутолщина слоя молекулярного водорода: $z_{1/2} \approx 26 \times 2$ кпк. Полутолщина для H_2 дают значительный вклад в массу газа в МЗС.

2. Молекулярный водород H_2 дает значительный вклад в массу газа в МЗС. Внутри области $R < 16$ кпк полная масса H_2 оценивается как $3,5 \cdot 10^9 M_\odot$, а полная масса атомарного водорода в этой области $3 \cdot 10^9 M_\odot$. При этом важно, что 90% H_2 заключено во внутренней части Галактики, в то время как атомарный водород составляет лишь 30%.



Относительная распространенность в диске	по массе	0,4	0,4	0,2	$\ll 1$	10^{-3}
	по объему	10^{-4}	0,01	0,5	$\ll 1$	0,5
Средняя концентрация	n , см $^{-3}$	10^3	40	0,1-1	10	$3 \cdot 10^{-3}$
	T , K	10	70	$(0,5 \pm 1) \cdot 10^4$	10^4	10^6

Рис. 10.1. Структура межзвездной среды и фазы межзвездного газа

* — подробнее см. [93, 53]; ** — [14, 61, 161, 219]; *** — [265, 93]

3. Молекулярный водород сосредоточен в основном в молекулярных облаках. При $R > 2$ кпк 85% H_2 сосредоточено примерно в 6000 облаков, имеющих диаметр свыше 22 пк и массу больше $10^5 M_\odot$, эти облака называют гигантскими молекулярными облаками.

4. По выборке примерно из 80 облаков установлены существенные статистические закономерности: распределение облаков по диаметрам $N(D) \sim D^{-2,3 \pm 0,25}$ при $D > 10$ пк; концентрация молекул H_2 в зависимости от диаметра $n(H_2) \approx 290 (D/20 \text{ пк})^{-0,75} \text{ см}^{-3}$, функция распределения масс молекулярных облаков $m dN(m) \sim m^{-1,58} dm$.

Недавно измерены магнитные поля некоторых молекулярных облаков при помощи анализа зеемановской структуры линии поглощения молекул гидроксила OH [229]. Напряженности магнитных полей разных облаков заметно различаются (как, впрочем, и плотности и другие характеристики) и находятся в пределах от 125 мкГс (источник Орион А) до 18 мкГс (источник W 22А) [229], составляя, как правило, несколько десятков микрогаусс. Важно отметить, что с молекулярными облаками связаны области звездообразования и зоны III, распределение которых в облаке (относительно области с максимальной эмиссией молекул CO) обсуждается в [377]. Радиальное распределение молекулярного водорода коррелирует с распределением частоты взрывов сверхновых звезд II типа, рассчитанной на единицу поверхности галактического диска [264].

Атомарный водород в Галактике (области HI). Наблюдения атомарного водорода ведутся в радиодиапазоне по излучению и поглощению в линии 21 см сверхтонкой структуры основного состояния наряду с оптическими методами. Выполнены многочисленные обзоры распределения HI в диске Галактики, сводка которых имеется, например, в работе [280], а детальный анализ в монографии [93]. Атомарный водород HI распространен в Галактике в форме облаков HI и более разреженной и теплой межоблачной среды. Распределение HI в Галактике значительно более плавное, чем распределение молекулярного водорода, описанное выше. Так, полная лучевая плотность атомарного водорода (определяемая как среднее число атомов в столбе единичной площади вдоль данного направления) в направлении, перпендикулярном диску Галактики, слабо зависит от радиального расстояния от центра Галактики в интервале $5 < R < 20$ кпк [264]. Вертикальная компонента лучевой плотности атомарного водорода составляет примерно $5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-2}$ [301].

Результаты наблюдений водородных линий поглощения от OB-звезд и эмиссионных линий в диапазоне 21 см указывают на наличие весьма протяженного гало атомарного водорода: на расстояниях от диска $|z| > 1$ кпк лучевая плотность составляет $(5 \pm 3) \cdot 10^{19} \text{ см}^{-2}$, т. е. 15% от полной лучевой плотности [301]. Данные наблюдений хорошо описывает модель, в которой половина массы HI сосредоточена в облаках с радиусами в несколько

парсек, имеющих гауссово z -распределение с масштабом 135 пк, а половина массы находится в межоблачной среде, имеющей экспоненциальное z -распределение с масштабом 500 пк [301]. Наблюдения спиновой температуры по линии 21 см и возбуждения молекул H_2 дают кинетическую температуру газа в облаках в пределах от 48 до 125 К, причем средняя температура 77 ± 17 К [226]. Облака III имеют распределение по размерам $N_{cl}(a) da \sim a^{-2,6} da$ в интервале $0,75 < a < 5$ пк [226], хотя при этом следует иметь в виду, что облака могут иметь несферическую форму [311].

В МЗС обнаружены также крупномасштабные структуры III — оболочки и сверхоболочки [263]. Расширяющиеся оболочки III обнаружены вокруг остатков сверхновых с возрастом более 10^5 лет [64], они имеются и у некоторых остатков с возрастом 10^4 лет. Сверхоболочки представляют собой образования с диаметрами более 2 кпк и имеют кинетическую энергию порядка 10^{53} эрг. Газ в оболочке III имеет температуру порядка 200 К и весьма разрежен — до нескольких частиц в кубическом сантиметре. Важную роль в устойчивости оболочки играют, по мнению Хейлеса [263], магнитные поля, достигающие 10 мкГс.

Ионизованная компонента межзвездного газа (зоны III). Основную долю объема диска Галактики занимает ионизованный (полностью или частично) водород. Можно выделить (разумеется, весьма условно) три основных типа областей ионизованного водорода в МЗС. Первый — это классические области III и планетарные туманности, формирующиеся вокруг звезд ранних спектральных классов, как одиночных, так и вокруг их скоплений [406]. Источники вещества в таких областях могут быть различными: звездный ветер, сброс оболочки красного гиганта, наконец, за счет облаков III, попавших в область фотоионизации излучением звезды. Типичные концентрации в областях III данного типа $n \gtrsim 10$ см⁻³, а температуры $T \sim 10^4$ К. Объемный фактор заполнения МЗС такими областями мал.

Второй тип областей III — это протяженные диффузные разреженные области ионизованного водорода, или зоны III низкой поверхностной яркости [17]. Подробное их исследование выполнено в последние годы Рейнольдсом [359, 325]. Параметры этих областей $n \approx 0,1 \div 1$ см⁻³ и $T \approx 10^4$ К. Интенсивность галактического фона в линии H_α позволяет определить скорость рекомбинации водорода ($4 \cdot 10^6$ с⁻¹·см⁻²) в окрестности 2—3 кпк от Солнца [358]. Это указывает на то, что основными источниками ионизирующего лаймановского излучения в диске Галактики должны быть O-звезды [358]. Формирование зон III низкой поверхностной яркости связано, по-видимому, с ионизацией водорода излучением звезд ранних спектральных классов [308], причем определенную роль могут играть ударные волны различной силы, распространяющиеся по диффузной МЗС [325]. Фактор объемного заполнения диска Галактики диффузными областями III описанного типа, видимо, весьма велик и может достигать, по различным оценкам, 0,25—0,5.

Наблюдения в рентгеновском диапазоне указывают на наличие в МЗС обширных областей, заполненных горячим разреженным ионизованным газом с параметрами $n \approx 10^{-2} \div 10^{-3} \text{ см}^{-3}$ и $T \approx 10^6 \text{ К}$, часто называемым «корональным». В дальнейшем мы будем говорить о нем как о корональной фазе газа МЗС. Объемный фактор заполнения МЗС данной фазой в настоящее время является предметом дискуссий [226, 311], различные оценки дают его в интервале от 0,20 до 0,8. Линии поглощения УФ-излучения ионом OVI показывают заметную распространенность областей с температурой $3 \cdot 10^5 - 10^6 \text{ К}$ в МЗС [226, 371], однако физический механизм их образования окончательно не установлен [226].

Местная межзвездная среда. Окрестность Солнечной системы с радиусом 100—200 пк называют местной (локальной) МЗС. В последние годы получены многочисленные наблюдательные данные о структуре местной МЗС (см. [226, 228] и обстоятельную статью [18]). Резюмируем кратко основные результаты, следуя [226, 18]. Солнечная система расположена на краю облака II, имеющего вид подковы, огибающей Солнце, это облако принято называть местным облаком. Размеры местного облака порядка десятков парсек. В окрестности Солнца от 10^{-4} до 2—5 пк имеем, по-видимому, теплую зону II низкой плотности $n \approx 0,1 \div 0,2 \text{ см}^{-3}$ и $T \approx 10^4 \text{ К}$, степень ионизации которой пока надежно не установлена. Местное облако расположено около края гигантской каверны, заполненной корональным газом с $T \approx 10^6 \text{ К}$. Каверна имеет форму, не сильно отличающуюся от сферической, с расстоянием от центра до края, меняющимся от 140—150 пк до 200—230 пк в разных направлениях. Некоторая вытянутость каверны связана с условиями ее расширения. В направлении Солнца каверна распространяется в коридор, заполненный газом низкой плотности, тянущийся на расстояние более чем 2 кпк от Солнца. Каверна окружена сверхоболочкой II. Внутри каверны имеются молекулярные облака, диффузные облака II и области ионизованного водорода III низкой поверхностной яркости с $n \approx 0,1 \div 0,2 \text{ см}^{-3}$ и размерами в десятки парсек, здесь же расположен остаток сверхновой — Северный полярный шпур. Согласно оценкам Бочкарева [18], ионизация в зонах III обусловлена светимостью в лаймановском континууме звезд ассоциации Скорпиона—Центавра, а энергетика каверны и сверхоболочки обеспечивается главным образом энергией взрывов сверхновых в ассоциации.

Наблюдательные данные, представленные выше, являются стимулом для разработки теоретических моделей. Историю эволюции теоретических представлений о структуре МЗС в течение последних десятилетий четко изложил Филд в обзоре [244]. Анализ устойчивых фазовых состояний при различных предположениях о механизмах нагрева и ионизации газа [298] приводит к результатам, согласующимся с результатами наблюдений, суммированными в схеме на рис. 10.1. Основные фазы — холодный газ с $T \approx 10^2 \text{ К}$, тепловая фаза газа с $T \approx 10^4 \text{ К}$ и корональный газ

с $T \approx 10^5$ К. Наиболее разработанной глобальной теорией МЗС является теория Макки и Острайкера [314]. В этой теории предполагается, что основное энергетическое воздействие на среду оказывают взрывы сверхновых, распределенные равномерно по диску Галактики. В результате получается трехфазное распределение газа в МЗС. В настоящее время предпринимаются попытки обобщения теории [314] с целью самосогласованного учета происхождения сверхновых звезд [272]. Учет неоднородности распределения сверхновых II типа, когерентно взрывающихся в OB-ассоциациях [310, 264], может привести к теоретической картине, заметно отличающейся от [314]. Все это, однако, должно служить предметом более подробного обсуждения, чем предпринятое в данном разделе.

10.2. Источники ударных волн в Галактике

Генерация ударных волн, как мы убедились в предыдущих главах, является универсальным эффектом, сопровождающим процессы с большим энерговыделением. Ударные волны и сопутствующие им течения переносят энергию, импульс и вещество из источников энерговыделения и играют поэтому очень важную роль в динамических процессах, происходящих в МЗС. Велика роль ударных волн и в процессах формирования и диссоциации молекул в плотных фазах газа МЗС [313]. Формирование ударных волн в МЗС имеет место как во вспышечных процессах в звездах различных типов, так и в квазистационарных источниках. Мы в основном будем рассматривать ударные волны от взрывов сверхновых звезд (одиночных или в скоплениях), так как их вклад в энергетику межзвездного газа, по-видимому, наиболее значителен, он превышает 10^{-26} эрг/(см³·с). Перечислим тем не менее и остальные источники ударных волн в Галактике, имея в виду, что в некоторых областях МЗС они могут существенно влиять на динамические процессы.

Спиральные ударные волны в галактическом диске. Формирование спиральных ударных волн происходит за счет ускорения газа и звезд, догоняющих спиральную волну плотности, гравитационным потенциалом спиральной волны (см. подробнее в [93]). Масштабы спиральных ударных волн могут быть порядка килопарсек, скорости движения порядка 10 км/с.

Ударные волны от звездных ветров. Наблюдениями установлено, что звезды ранних спектральных классов, имеющие достаточно большую массу (около $20 M_{\odot}$), излучают механическую энергию в виде мощного звездного ветра, причем мощность звездного ветра может быть описана соотношением: $L_w \approx 3 \cdot 10^{35} (M/20 M_{\odot})^{2,3}$ эрг/с [311]. Темп потери массы звездой класса O варьируется $\dot{M} \approx 10^{-8} \div 10^{-5} M_{\odot}/\text{год}$, для звезд Вольфа—Райе он составляет $10^{-5} - 10^{-4} M_{\odot}/\text{год}$. Скорость звездного ветра в этих случаях составляет $(1 \div 3) \cdot 10^3$ км/с. Полное энерговыделение при этом может достигать 10^{50} эрг, т. е. быть сравнимым с энерговыделением сверхновых. В разд. 9.2 дан закон, описывающий эволюцию

ударной волны, ограничивающей область, возмущенную звездным ветром (9.101), который можно представить в форме

$$R_s(t) \approx 27 \left(\frac{L_w}{10^{36} \text{ эрг/с}} \right)^{1/4} \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-1/4} \left(\frac{t}{10^6 \text{ год}} \right)^{3/4} \quad (10.1)$$

в случае расширения в однородную среду [311, 400] (R_s — радиус фронта ударной волны, пк). В случае расширения в облачную среду могут стать существенными потери энергии на высвечивание и закон движения будет иным:

$$R_s(t) \approx 16 \left(\frac{L_w}{10^{36} \text{ эрг/с}} \right)^{1/4} \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-1/4} \left(\frac{v_w}{10^8 \text{ см/с}} \right)^{-1/4} \left(\frac{t}{10^6 \text{ год}} \right)^{1/2}, \quad (10.2)$$

где v_w — скорость звездного ветра [311].

Столкновения облаков в МЗС также являются источником ударных волн. Если два облака правильной геометрической формы (например, сферы или плоские «листы») сталкиваются с относительной скоростью v_0 и прицельным параметром много меньше размеров облака, то возникает область сжатого газа, которую можно рассматривать как разрыв в начальном распределении плотности, давления и других параметров. Распад этого разрыва при сверхзвуковой относительной скорости v_0 сопровождается формированием двух ударных волн, движущихся от плоскости симметрии столкновения в оба облака. Для одинаковых облаков при $v_0 \gg c_s$ скорости ударных волн относительно несжатого газа в облаках составляют примерно $v_0/2$ [234]. На структуру фронта ударной волны в облаке существенное влияние может оказывать магнитное поле МЗС; роль магнитных полей и радиационных процессов лучистой релаксации в данной задаче обсуждается в книге [63].

Ударные волны от взрывов сверхновых звезд [13, 84], как уже было отмечено выше, являются основным источником энергии и импульса крупномасштабных движений межзвездного газа. Они формируют области (каверны), заполненные горячим корональным газом в МЗС, ускоряют облака, влияют на распространение и ускорение космических лучей. Поскольку статистическое распределение ударных волн, а следовательно и степень их воздействия на те или иные области МЗС, существенно зависит от законов эволюции ударных волн, мы приведем эти законы, следуя работе [272], см. также [221, 311, 314].

Рассмотрим ударную волну, сформированную в результате взрыва сверхновой звезды с энергией газодинамических движений ϵ . Среда, в которой распространяется ударная волна, имеет на фоне однородного распределения газа с концентрацией n облака HI (см. рис. 10.1) размера a (порядка 2 пк), число которых в кубическом парсеке — N_{cl} . Тогда стадия расширения, на которой существенную роль играет эффект испарения облаков, рассмотренная в разд. 9.2, продолжается в течение интервала времени (в годах $0 < t \leq \tau_1$), где

$$\tau_1 = 3,9 \cdot 10^4 \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{N_{cl}}{1 \text{ пк}^{-3}} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{1 \text{ пк}} \right)^{1/2}. \quad (10.3)$$

Среднее значение N_{cl} в МЗС, по-видимому, не менее 10^{-4} пк $^{-3}$ [272], Спитцер [384] дает оценку $N_{cl} \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ пк $^{-3}$. Зависимость радиуса фронта ударной волны от времени на этой стадии

$$R_s(t) = 0,03 \left(\frac{\varepsilon}{10^{51} \text{ эрг}} \right)^{0,1} \left(\frac{N_{cl}}{1 \text{ пк}^{-3}} \right)^{-0,1} \left(\frac{a}{1 \text{ пк}} \right)^{-0,1} \left(\frac{t}{1 \text{ год}} \right)^{0,6}. \quad (10.4)$$

По истечении времени τ_1 на смену режиму (10.4) приходит режим адиабатического расширения, описываемый решением Седова. Продолжительность стадии адиабатического расширения $\tau_1 < t \leq \tau_2$, где

$$\tau_2 \simeq 2,1 \cdot 10^4 \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-0,56}, \quad (10.5)$$

определяется темпом охлаждения за счет высвечивания. Радиус фронта при этом растет по закону

$$R_s(t) \simeq 0,32 \left(\frac{\varepsilon}{10^{51} \text{ эрг}} \right)^{0,2} \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-0,2} \left(\frac{t}{1 \text{ год}} \right)^{0,4}. \quad (10.6)$$

Следующая стадия расширения фронта ударной волны, связанная с формированием холодной плотной оболочки, продолжается в течение времени $\tau_2 < t \leq \tau_3$, где

$$\tau_3 \simeq 1,1 \cdot 10^9 \left(\frac{T}{1 \text{ К}} \right)^{-0,7} \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-0,37}. \quad (10.7)$$

Рост радиуса ударной волны при этом происходит по закону

$$R_s(t) \simeq 1,1 \left(\frac{\varepsilon}{10^{51} \text{ эрг}} \right)^{119/511} \left(\frac{n}{1 \text{ см}^{-3}} \right)^{-133/511} \left(\frac{t}{1 \text{ год}} \right)^{2/7}. \quad (10.8)$$

В реальных условиях МЗС эволюция ударной волны оболочки сверхновой может пройти либо все три указанные стадии, либо в зависимости от соотношений τ_1 , τ_2 и τ_3 , определяющихся параметрами среды, может доминировать какая-то из стадий. Существенной может быть неоднородность МЗС, в частности, возможны столкновения двух или нескольких остатков, важна конечность толщины диска Галактики и другие факторы. Особенно важны эти эффекты в случае взрыва ансамбля звезд в ОВ-ассоциации, что типично для сверхновых II типа [264, 310].

10.3.

Функция распределения ударных волн в межзвездной среде

Рассмотрим статистические распределения ударных волн в МЗС. Статистическое распределение ударных волн различной силы необходимо знать для построения количественной теории формирования турбулентности в МЗС [27—29], теории распространения галактических космических лучей [61, 184, 203, 215], механизмов разрушения межзвездных пылинок [234] и т.п. Среднюю распространенность ударных волн различной силы удобно описывать функцией распределения $P(\mu)$, т. е. средним числом пересечений

данной точки пространства в единицу времени ударными волнами силы μ , рассчитанным на единичный интервал чисел μ . Сила ударной волны здесь характеризуется числом Маха ударной волны $\mu = v_s/c_s$, v_s — скорость фронта ударной волны, c_s — скорость звука в среде перед фронтом.

Вычислим функцию распределения ударных волн порожденных взрывами сверхновых. Пусть взрывы сверхновых происходят в некоторой области пространства с частотой на единицу объема S . В частности, в трехфазной теории МЗС Макки и Острайкера [314] предполагается, что сверхновые взрываются некогерентно в диске Галактики с частотой $S \simeq 10^{-13} \text{ пк}^{-3} \cdot \text{год}^{-1}$. Взрывы сверхновых порождают сильные ударные волны в МЗС, которые мы будем называть первичными. Распространение первичных ударных волн будем описывать сферически-симметричными решениями, рассмотренными в разд. 9.2 и 10.2. Причем удобно, используя закон движения фронта, получить связь радиуса фронта ударной волны с ее силой μ . Для решений (10.4), (10.6) и (10.8) $R_s(\mu)$ можно представить в виде

$$R_s(\mu_1) = R_0 \mu_1^{-\alpha/3}, \quad (10.9)$$

где максимальный радиус фронта R_0 можно определить по начальной энергии взрыва и параметрам окружающего газа из соотношений, приведенных в разд. 10.2. Мы здесь считаем для простоты, что доминирует какой-либо один из режимов расширения фронта, в случае необходимости можно легко обобщить результаты на случаи большого числа стадий (если соответствующие времена τ_1 , τ_2 и τ_3 сравнимы). Решению (10.4) отвечают $\alpha = 4,5$, а (10.6) и (10.8) соответственно $\alpha = 2$ и $\alpha = 1, 2$. Для вычисления функции распределения первичных ударных волн заметим, следуя [203, 184], что среднее число пересечений данной точки МЗС ударными волнами с силой больше заданной, которое мы обозначим $F(\mu)$, определяется соотношением

$$F(\mu_1) = (4\pi/3) R_s^3(\mu_1) S. \quad (10.10)$$

Действительно, считая взрывы распределенными статистически однородно, получим, что $F(\mu_1)$ пропорционально доле объема области, находящейся внутри остатков с радиусом $R_s(\mu_1)$. Отсюда получим искомое распределение для первичных ударных волн $P^{(1)}$ в виде

$$P^{(1)}(\mu_1) = -\frac{dF}{d\mu_1} = \alpha S \frac{4\pi}{3} R_0^3 \mu_1^{-(\alpha+1)} \equiv \frac{P_0}{\mu_1^{\alpha+1}}. \quad (10.11)$$

В условиях МЗС первичные ударные волны распространяются в среде с сильными неоднородностями плотности — межзвездными облаками. Взаимодействие первичных волн с облаками приводит к генерации вторичных (отраженных) ударных волн. Число вторичных волн, приходящихся на одну первичную, можно оценить как $(4\pi/3) R_0^3 N_{cl}$. Например, в трехфазной теории МЗС [314] име-

ем, что на одну первичную волну приходится около 10^3 вторичных волн. Основной вклад в эффект генерации вторичных волн вносят, очевидно, поздние стадии эволюции, когда радиус фронта первичной волны близок к максимальному. Определим теперь функцию распределения вторичных ударных волн [29, 216]. Для этого рассмотрим две модели вторичных волн. В первой модели вторичные ударные волны будем асимптотически описывать сферически-симметричными решениями. Причем, как следует из (9.132) (при $\gamma = 5/3$), сила отраженной ударной волны $\mu_0 - 1 \lesssim 1$, если сила первичной волны $\mu_1 \lesssim 3$. Поскольку, как отмечалось, основной вклад в генерацию вторичных ударных волн вносят поздние стадии, то без ограничения общности можно считать вторичные волны слабыми и использовать решение (9.105), которое запишем как

$$\mu_2 - 1 \simeq (\mu_0 - 1) \left(\frac{a}{R_2} \right) \left(\ln \frac{R_2}{a} \right)^{-1/2}, \quad R_2 > a, \quad (10.12)$$

где R_2 — радиус фронта вторичной ударной волны, имеющей силу μ_2 ; μ_0 — сила вторичной ударной волны непосредственно в окрестности облака сразу после отражения. Будем приближенно использовать для μ_0 выражение (9.132), которое для идеального газа с $\gamma = 5/3$ примет вид

$$\mu_0 = [(5\mu_1^2 - 1)/(\mu_1^2 + 3)]^{1/2}. \quad (10.13)$$

Пренебрегая в (10.12) логарифмическим множителем, получим связь $R_2(\mu_2)$ с μ_0 . С учетом (10.13) можно представить функцию распределения вторичных ударных волн в виде

$$P^{(2)}(\mu_2) \simeq 3f_{cl} \int_1^\infty d\mu_1 \int_\mu^{m_*} d\mu_0 P^{(1)}(\mu_1) \delta \left(\mu_1 - \sqrt{\frac{3\mu_0^2 + 1}{5 + \mu_0^2}} \right) \frac{(\mu_0 - 1)^3}{(\mu_2 - 1)^4}, \quad (10.14)$$

где f_{cl} — фактор объемного заполнения области облаками. В теории МЗС Макки и Острайкера [314] $f_{cl} \simeq 0,25$; обсуждение оценки из наблюдений см., в частности, в [384]. Отметим, что фактически верхний предел интегрирования по силе первичных волн μ_1 в (10.14) должен быть 2,76 (в идеальном одноатомном газе), поскольку вторичные волны распространяются относительно облака, лишь если $\mu_1 \lesssim 2,76$. Вторичные ударные волны, образованные первичными с $\mu_1 > 2,76$, формируют головную ударную волну облака. Это обстоятельство ограничивает область применимости распределения (10.14) вторичными волнами с $\mu_2 \leq m_*$, где $m_* \simeq 1,87$. Заметим здесь, что максимальное возможное значение $m_* = \sqrt{5}$. Оно реализуется, если скорость потока за фронтом первичной ударной волны относительно облака станет дозвуковой к моменту формирования вторичной волны (10.12). Из (10.14) получим приближенное выражение:

$$P^{(2)}(\mu_2) \simeq \frac{4\pi\alpha S f_{cl} R_0^3}{(\mu_2 - 1)^4} C(3; \alpha), \quad \mu_* \leq \mu \leq m_*, \quad (10.15)$$

где

$$C(n; \alpha) = \int_1^{m_*} \left(\frac{5-x^2}{3x^2+1} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} (x-1)^n dx, \quad (10.16)$$

$$C(3; \alpha) = \begin{cases} 2,9 \cdot 10^{-2}, & \alpha = 1,2, \quad m_* = 1,87, \\ 1,7 \cdot 10^{-2}, & \alpha = 2, \\ 3,8 \cdot 10^{-3}, & \alpha = 4,5. \end{cases} \quad (10.17)$$

Минимальная сила вторичной ударной волны μ_* в ансамбле (10.15) определяется действием ряда факторов, основные из которых в условиях МЗС: бесстолкновительное затухание ударных волн на тепловых и надтепловых частицах, а также взаимодействие волн ансамбля с турбулентностью (мы обсудим этот эффект в разд. 10.5). Оценки дают $(\mu_* - 1) \gtrsim (10^{-2} \div 3 \cdot 10^{-2})$. Отметим резкий рост распространенности вторичных ударных волн при уменьшении μ_2 . Среди ударных волн с $\mu \lesssim 1,2$ (для модели МЗС [314]) вторичные ударные волны заметно преобладают. Оценка (10.15) в рамках трехфазной теории МЗС [314] дает для сферических вторичных волн распределение

$$P^{(2)}(\mu_2) \simeq 10^{-8} (\mu_2 - 1)^{-4}, \quad \mu_* < \mu < m_*. \quad (10.18)$$

В условиях МЗС, как уже отмечалось выше, ударные волны, как правило, являются бесстолкновительными. Распространение слабых бесстолкновительных ударных волн в горячей плазме с магнитным полем ($\beta \gtrsim 1$) может сопровождаться сильным линейным затуханием Ландау [216]. Затухание Ландау несущественно для сильных первичных ударных волн, которые мы, как и ранее, будем считать сферически-симметричными и описывать распределением (10.11). Слабые вторичные ударные волны, распространяющиеся почти вдоль или поперек направления регулярного магнитного поля, также не испытывают линейного затухания Ландау. Такие вторичные волны можно описывать одномерными решениями типа (9.103) [216]

$$\mu_2 - 1 \simeq (\mu_0 - 1) \sqrt{a/x}. \quad (10.19)$$

Распределение вторичных ударных волн в одномерной модели легко рассчитать по аналогии со сферически-симметричным случаем, с заменой (10.12) на (10.19). С учетом этого получим

$$P^{(2)}(\mu_2) \simeq \frac{2\pi\alpha S f_{cl} R_0^3}{(\mu_2 - 1)^3} C(2; \alpha), \quad \mu_* < \mu < m_*. \quad (10.20)$$

Область пространства будет полностью «покрыта» такими одномерными ударными волнами, если толщина слоя облаков (в случае Галактики — толщина диска) превышает величину

$$L \simeq (3\sqrt{\pi} f_{cl} / 4N_{cl})^{2/3}, \quad (10.21)$$

где мы считали, что облака имеют сферическую форму. Заметим здесь, что фактически в этом разделе под радиусом облака (а следовательно, и f_{cl}) мы понимаем эффективный радиус облака, отвечающий радиусу отражения ударной волны. В общем случае он зависит от силы первичной ударной волны, но для волн с $\mu < 3$ мы эту зависимость не принимаем во внимание. Таким образом, полученные распределения (10.11), (10.15) или (10.20) решают задачу об определении статистики ударных волн в области пространства со статистически однородным распределением источников первичных ударных волн и неоднородностями плотности в виде облаков, генерирующих вторичные волны. В теории МЗС Макки и Острайкера [314] предполагается, что сверхновые взрываются в диске Галактики статистически независимо и однородно, поэтому полученные распределения можно в рамках модели [314] применять по всему диску [29]. В моделях, учитывающих когерентность взрывов сверхновых II типа [264, 310], распределение вторичных ударных волн можно применять внутри каверны, образующейся вокруг ОВ-ассоциации, с соответствующими изменениями численных значений параметров.

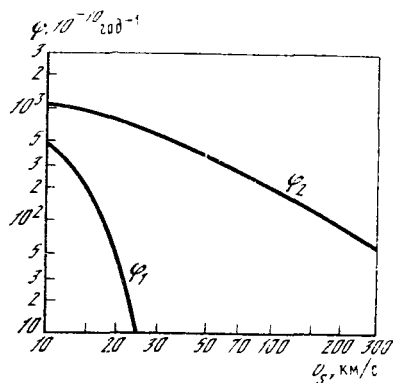


Рис. 10.2. Распределение по скоростям ударных волн в облаках [234]

Рассмотрим в заключение раздела вклад в распределение ударных волн в диффузных облаках III, обусловленный эффектом столкновения облаков [234]. Пусть облака радиуса a распределены случайно с концентрацией N_{cl} и движутся с изотропным по направлениям распределением скоростей, отсчитываемых относительно некоторой системы отсчета. Функция распределения $f(v_r)$ по проекциям скорости на луч зрения v_r нормирована условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_r) dv_r = 1. \quad (10.22)$$

Через функцию $f(v_r)$ можно, очевидно, выразить вероятность столкновения в единицу времени облаков с данной относительной скоростью u , далее, функцию распределения ударных волн. Вероятность $\psi(v_s)$ в единицу времени данному элементу облака быть пересеченным ударной волной, имеющей скорость v_s , рассчитанная на единичный интервал скоростей v_s , связана с f посредством соотношения (см. [234])

$$\psi(v_s) = \frac{12f_{cl}}{a} v_s^2 \int_0^{\infty} du \frac{df}{du} [f(2v_s + u) - f(|2v_s - u|)]. \quad (10.23)$$

Распределение облаков по скоростям определяют из наблюдений. Приведем на рисунке 10.2, следуя [234], результаты расчета «интегрального» распределения ударных волн в облаках $\varphi(v_s)$

$$\varphi(v_s) = \int_{v_s}^{\infty} \psi(u) du \quad (10.24)$$

для двух законов распределения облаков по скоростям

$$f_1(v_r) = 2b^{-1} \exp(-|v_r|/b), \quad b = 5,0 \text{ км/с}, \quad (10.25)$$

$$f_2(v_r) = b^2 (b + |v_r|)^{-3}, \quad b = 7,0 \text{ км/с}. \quad (10.26)$$

Результаты расчета обозначены на рис. 10.2 как φ_1 и φ_2 для (10.25) и (10.26) соответственно.

10.4. Спектр турбулентности, создаваемой ударными волнами

Проблема происхождения и определения статистических характеристик турбулентности в различных фазах МЗС имеет ключевое значение для многих вопросов астрофизики. К этим вопросам относятся: перемешивание вещества и перенос элементов синтезированных сверхновыми звездами, генерация и перенос магнитных полей, распространение и ускорение космических лучей. Турбулентные флуктуации электронной концентрации и магнитного поля влияют на дисперсию электромагнитных волн в МЗС и определяют распространение излучения, в частности мерцания пульсаров, квазаров и других компактных источников. В свою очередь, исследования мерцаний пульсаров и фарадеевского вращения в радиодиапазоне являются сегодня одним из основных источников наблюдательной информации о спектрах МЗС [169, 171, 179, 224]. В настоящее время имеются наблюдательные данные, свидетельствующие в пользу существования турбулентности в различных фазах МЗС. Анализ дисперсии скоростей газа в молекулярных облаках [296] в зависимости от масштаба дает степенную зависимость, близкую к закону Колмогорова—Обухова [99]. Турбулентные движения обнаружены в областях III [359, 324]. В работе [179] сведены воедино сведения о турбулентных флуктуациях, полученные различными методами в различных интервалах масштабов и, вообще говоря, в различных фазах газа МЗС. Это позволило авторам работы [179] сделать вывод о том, что имеющиеся данные не противоречат наличию единого степенного спектра флуктуаций с плотностью энергии, рассчитанной на единичный интервал волновых чисел k : $W(k) \sim k^{-\nu}$, где $1,4 \leq \nu \leq 1,8$ в очень широком интервале $10^{-20} < k < 10^{-8} \text{ см}^{-1}$.

Наблюдения указывают на значительную неоднородность в распределении турбулентности в МЗС [171, 224]. Неоднородность распределения турбулентности обусловлена как особенностями пространственного распределения источников энергии, так и очень

существенными различиями в дисперсионных и диссипативных свойствах различных фаз МЗС, приведенных на рис. 10.1. Основные источники энергии и импульса турбулентности в МЗС — это крупномасштабные движения газа и звездной подсистемы (волны плотности и т. п.), а также активные процессы в звездах и звездных скоплениях (взрывы сверхновых, звездные ветры и пр.).

Механизмы формирования крупномасштабных турбулентных движений обычно связаны с эффектами взаимодействия ударных волн и сопутствующих им нелинейных волн сжатия и разрежения, генерированных источниками энерговыделения, с неоднородностями среды, окружающей источники. Эволюция крупномасштабных движений — ударных волн и длинноволновых возмущений плотности и магнитных полей подробно обсуждалась в гл. 8 и 9. Генерация мелкомасштабных флуктуаций имеет специфические особенности. Передача энергии от источника во флуктуации мелких масштабов может осуществляться по нескольким каналам. В их числе механизм нелинейного переноса энергии по спектру [166, 312], аналогичный тому, который имеет место в гидродинамике [76, 99, 128]. Существенную роль в процессах генерации и диссипации энергии мелкомасштабных флуктуаций в бесстолкновительной плазме играют взаимодействия волна—частица [56, 57], т. е. взаимодействия электромагнитных полей плазменных движений с тепловыми и надтепловыми частицами.

Резонансное взаимодействие МГД-волн с космическими лучами [11, 219] и нелинейное рассеяние волн на ионах в горячей бесстолкновительной плазме, линейное и нелинейное затухания Ландау — наиболее важные в условиях МЗС процессы взаимодействия волна—частица. В частности, поскольку плотность энергии космических лучей порядка плотности энергии тепловой плазмы, а в окрестности сильных ударных волн может превышать последнюю, резонансные эффекты генерации МГД-волн космическими лучами вносят, по-видимому, заметный вклад в генерацию альвеновских волн с длиной волны до 10^{13} см. Важен эффект генерации волн космическими лучами в молекулярных облаках [72] и других фазах МЗС [11, 219].

Рассмотрим в этом и последующем разделах модель, описывающую турбулентность в диффузных фазах МЗС, занимающих основную долю объема диска. В качестве источника энергии турбулентности рассматриваем взрывы сверхновых и совокупное действие звездных ветров в ОВ-ассоциациях. Источники энергии формируют первичные сильные ударные волны. Распространение первичных ударных волн в среде с облаками ведет к множественному рождению вторичных ударных волн (см. разд. 10.3) с сопутствующими крупномасштабными движениями. Наша задача — определить спектры флуктуаций плотности, скорости и магнитного поля, связанные со вторичными волнами [29]. В рассматриваемой модели хорошо определенными структурными ячейками являются почти сферические ударные волны с разрежениями во внутренней части сферы. Некогерентное наложение большого числа таких

ячеек определяет флуктуации параметров МЗС. Расчет спектральной плотности энергии флуктуаций удобно выполнить в два этапа. На первом этапе рассмотрим статистически однородный, изотропный ансамбль ячеек с ударными волнами заданной силы μ . Фурье-образ поля скорости внутри ячейки, состоящий из сферической ударной волны радиуса R и силы μ с разрежением внутри можно представить в виде

$$u_k = \frac{4\pi\mu c_s}{k} \int_0^1 yg(y) \sin(kRy) dy, \quad (10.27)$$

где функция $g(r)$ описывает поле скорости в области разрежения. Асимптотическое поведение (10.27) можно представить как

$$u_k \sim \mu c_s \begin{cases} R^3, & kR \ll 1, \\ \frac{R \cos kR}{k^2}, & kR \gg 1. \end{cases} \quad (10.28)$$

После усреднения величины $|u_k|^2$ по быстрым осцилляциям и с учетом соотношения

$$\int u^2(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int |u_k|^2 dk \quad (10.29)$$

можно представить спектральную плотность кинетической энергии (на единицу массы) $w(k, \mu)$ в виде

$$w(k, \mu) = \frac{4c_s^2 (\mu - 1)^2 k^2 R^3 (\mu)}{\pi [1 + k^2 R^2 (\mu)]^2}. \quad (10.30)$$

Это выражение справедливо для масштабов $k\delta \ll 1$, где δ — ширина фронта ударной волны (в условиях МЗС, как правило, бесстолкновительной). Формула (10.30) является интерполяционной; она правильно описывает область масштабов $kR \gg 1$, где универсальный спектр k^{-2} имеет место за счет резких скачков — ударных волн, и область масштабов $kR \ll 1$, определяемую разрежением. В области масштабов $kR \approx 1$ спектр определяется конкретной структурой разрежения (функцией $g(r)$) и описывается (10.30) лишь приближенно.

На втором этапе усредним полученное распределение спектральной плотности энергии по ансамблю вторичных ударных волн с различными числами Маха. Это можно сделать, используя (10.12) и соображения, аналогичные использовавшимся при выводе распределения (10.14); получим

$$W^{(2)}(k) = \frac{3\alpha f_{cl}}{P_0} \int_1^\infty d\mu_1 \int_1^{m_*} d\mu_2 \int_{\mu_2}^{m_*} d\mu_0 P^{(1)}(\mu_1) w(k, \mu_2) \times \\ \times \frac{(\mu_0 - 1)^3}{(\mu_2 - 1)^4} \delta\left(\mu_1 - \sqrt{\frac{5\mu_0^2 + 1}{5 - \mu_0^2}}\right), \quad (10.31)$$

где $P_0 \equiv 4\pi\alpha S R_0^3/3$. Вычисление спектральной плотности (10.31) для модели вторичных сферических волн приводит к результату:

$$W^{(2)}(k) \simeq \frac{3\alpha c_s^2 f_{cl} a^3 C(6; \alpha) k^2}{\pi (\mu_* - 1)^6}, \quad ka \ll (\mu_* - 1), \quad (10.32)$$

в области масштабов $ka \gg (\mu_* - 1)$ имеем

$$W^{(2)}(k) \simeq \frac{12\alpha c_s^2 C(2; \alpha) f_{cl}}{\pi k^2 a} \ln \left(\frac{\mu_* - 1}{\mu_* - 1} \right). \quad (10.33)$$

Отметим, что фактически в области крупных масштабов сравнимый с (10.32) вклад в плотность энергии вносят первичные ударные волны и связанные с ними крупномасштабные движения. Вклад от этих движений изучен в работах [29, 216]. Что касается мелкомасштабной (в смысле $ka \gg (\mu_* - 1)$) области спектра, то здесь флуктуации, связанные с первичными ударными волнами, распределены резко неоднородно в пространстве: они локализованы в окрестности фронтов первичных волн. Вторичные ударные волны встречаются гораздо чаще, среднее расстояние между ударными волнами с силой μ не превышает величины $\mu c_s F^{-1}(\mu)$, что в горячей фазе МЗС может составлять 10^{16} см. Поэтому статистически однородная часть мелкомасштабной части спектра обусловлена слабыми вторичными волнами. Существенно, что зависимость спектра (10.33) от μ_* слабая — логарифмическая. Приведем в заключение результаты расчета спектра флуктуаций в модели одномерных вторичных ударных волн, обсуждавшейся в разд. 10.3 [216]:

$$W^2(k) \sim \begin{cases} \frac{\alpha c_s^2 f_{cl}}{k^2 a}, & ka \gg (\mu_* - 1)^2, \\ \frac{\alpha c_s^2 f_{cl} a}{(\mu_* - 1)^4} C(4; \alpha), & ka \ll (\mu_* - 1)^2. \end{cases} \quad (10.34)$$

Выражения (10.30), (10.32)—(10.34) записаны для плотности кинетической энергии (на единицу массы), однако можно убедиться, что спектральные распределения флуктуаций плотности и магнитного поля имеют такую же форму. В рассмотренной модели мы не учитывали эффектов взаимодействия ударных волн с МГД-волнами малой амплитуды, которые могут эффективно обмениваться энергией с ударными волнами. Анализ этого эффекта в рамках газодинамической модели — содержание следующего раздела.

10.5. Генерация вихревых и звуковых ветвей турбулентного спектра ансамблем ударных волн

Наряду с картиной формирования турбулентности, описанной в разд. 10.4, основными элементами которой являются ударные волны, определенную роль должны играть неударные МГД-волны. В частности, в области слабой диссипации эффекты нелинейного переноса энергии по спектру формируют распределения плотнос-

ти энергии по масштабам, которые могут спадать в области мелких масштабов медленнее, чем k^{-2} в законах (10.32) и (10.34) [56, 57, 78, 123, 312]. С другой стороны, мы убедились в разд. 9.3 в том, что газодинамические моды эффективно взаимодействуют с ударными волнами. В результате взаимодействия имеет место перераспределение энергии между модами.

Рассмотрим, следуя [27, 30], взаимодействие турбулентной подсистемы мод малой амплитуды с ансамблем ударных волн и разрежений, описанным в разд. 10.3. Анализ основан на рассмотрении элементарного акта взаимодействия газодинамических мод с одной реализацией ансамбля — ударной волны заданной силы μ и разрежения, следующего за ним. Амплитуду плоской волны $a_i^{(1)}(\mathbf{k}_i)$ (где $i = s, v, e$ нумерует типы мод: акустическую, вихревую и энтропийную соответственно) за фронтом ударной волны можно выразить через амплитуды мод $a_i^{(0)}(k_i)$ до фронта посредством соотношения:

$$a_i^{(1)}(\mathbf{k}_i) = \sum_j \int d\boldsymbol{\kappa}_j \hat{T}_{ij}(\mathbf{n}_{sh}, \mathbf{n}_j, \mu) a_j^{(0)}(\boldsymbol{\kappa}_j) \delta(\mathbf{k}_i - \mathbf{f}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_j)), \quad (10.35)$$

где \mathbf{n}_{sh} — единичный вектор нормали к фронту; $\mathbf{n}_j = \mathbf{k}_j / |\mathbf{k}_j|$; вектор-функция $\mathbf{f}_{ij}(\boldsymbol{\kappa}_j)$ описывает преобразование волновых векторов на фронте, а матрица \hat{T}_{ij} — преобразование амплитуд. Обе матрицы, введенные выше, разумеется, связаны соответствующим образом с (9.116), (9.117) и (9.188) и отличаются лишь формой записи, более удобной в данной задаче. Эволюция амплитуды $a_i^{(1)}$ и волнового вектора \mathbf{k}_i за фронтом определяется взаимодействием моды с областью разрежения. В ансамбле превалируют слабые ударные волны с $\mu_* \leq \mu \leq 2$, а масштабы соответствующих областей разрежения имеют порядок масштабов облаков или превышающий их. Это позволило описать взаимодействие мелкомасштабных мод с разрежениями в приближении геометрической акустики [30]. В частности, если разрежение можно считать плоским, т. е. его параметры зависят лишь от координаты вдоль нормали к ударному фронту, то взаимодействие мод с ударной волной и разрежением можно описывать той же формулой (10.35), но с перепределенной матрицей \hat{T}_{ij} . Элементы \hat{T}_{ij} получаются из \hat{T}_{ij} умножением на соответствующие коэффициенты трансформации амплитуд мод в волне разрежения. Аналогично видоизменится и \mathbf{f}_{ij} . Следующий этап состоит в построении корреляторов вида $\langle a_i^{(1)}(\mathbf{k}_i) a_j^{*(1)}(\mathbf{k}_j) \rangle$, что позволяет с помощью (10.35) получить законы преобразования парных корреляторов при прохождении через среду ударной волны с разрежением (при фиксированном μ). Если спектральные плотности энергии мод до прохождения фронта с разрежением имели степенные спектры в определенном интервале масштабов $W_i^{(0)}(k) \sim k^{\nu_i}$, то можно получить [30] связь

$$W_i^{(1)}(k) = \sum_j \hat{T}_{ij}(\nu_j) W_j^{(0)}(k). \quad (10.36)$$

Матрица \bar{T}_{ij} табулирована на основе численного расчета, после чего получены аппроксимирующие аналитические выражения для нее [30]. Диагональные элементы матрицы не зависят от индекса ν_j , наиболее существенные коэффициенты трансформации от ν_j зависят слабо. Следующий этап — усреднение матрицы \bar{T}_{ij} по ансамблю реализаций различных значений μ (10.11), (10.15). Резюмируя результаты усреднения, отметим, что при взаимодействии с ансамблем ударных волн и разрежений плотность энергии вихревой моды растет, а плотности энергии звуковых и энтропийных мод уменьшаются. Наряду с этим имеет место взаимная трансформация мод на фронтах ударных волн ансамбля. Спектральные плотности энергии мод $W_i(k)$ удовлетворяют уравнениям баланса энергии, которые представим в виде

$$\partial_t W_i + \partial_k \Pi_k^i = \sum_j \gamma_{ij} W_j, \quad (10.37)$$

где Π_k^i — спектральная плотность потока энергии; γ_{ij} — матрица, описывающая взаимодействие мод с ансамблем ударных волн, ее элементы получаются усреднением \bar{T}_{ij} по ансамблю (10.11), (10.15). Собственные декременты затухания мод следует включать в диагональные элементы γ_{ii} . Мы, однако, будем решать систему (10.37) в области масштабов $k \ll k_d$, в которой диссипацией можно пренебречь, здесь k_d отделяет инерционный интервал и область источников от области диссипации.

Особенностью взаимодействия мод с ансамблем ударных волн и разрежений является выделение вихревой моды. Действительно, в работе [30] показано, что $\gamma_{vv} > 0$ и $\gamma_{vv} \gg \gamma_{vs}$ и γ_{ve} . Отсюда следует, что, поскольку γ_{ss} и $\gamma_{ee} < 0$, ансамбль будет непосредственно усиливать лишь вихревые возмущения. Вихревая мода, в свою очередь, будет за счет линейной трансформации на фронтах ударных волн (γ_{sv} и $\gamma_{ev} > 0$) являться источником энергии звуковой и энтропийной мод. Усиление вихрей ударными волнами с разрежениями компенсируется нелинейными эффектами переноса энергии по спектру, которые описывает второе слагаемое уравнения (10.37). В общем случае Π_k^i является нелинейным функционалом от плотности энергии мод. В данной работе мы ограничимся учетом нелинейных эффектов низшего порядка. Принимая во внимание рассмотренные особенности механизма формирования турбулентности, уравнение для плотности энергии вихревой моды можно выделить из системы (10.37) и представить в форме

$$\partial_t W_v + \partial_k \Pi_k^v = \gamma_{vv} W_v. \quad (10.38)$$

Спектральную плотность потока энергии вихрей берем в форме Коважного, которая обсуждается в монографии [128]:

$$\Pi_k^v = k \sqrt{k W_v / \rho_0} k W_v; \quad (10.39)$$

здесь ρ_0 — плотность среды.

Уравнение (10.38) с потоком (10.39) имеет стационарное решение

$$W_v(k) = \frac{\gamma_{rv}^2 \rho_0}{4k_1^3} \left[1 - \left(\frac{k_1}{k} \right)^{2/3} \right]^2 \left(\frac{k_1}{k} \right)^{1/3}, \quad k_1 \leq k < k_d, \quad (10.40)$$

где наложено условие отсутствия вихрей и других мод с масштабами больше k_1^{-1} . Плотность энергии вихрей имеет экстремум в точке $k_{ov} \approx 2,4 k_1$. В области мелких масштабов $k \gg k_{ov}$ спектр вихрей имеет степенную асимптотику с $\nu = -5/3$. В области крупных масштабов имеем $W_v \sim (k - k_1)^2$. Плотность энергии продольных акустических волн найдем из уравнения

$$\partial_t W_s + \partial_k \Pi_k^s = \gamma_{ss} W_s + \gamma_{sv} W_v, \quad (10.41)$$

которое следует из (10.37) после пренебрежения малыми вкладами от энтропийной моды. Спектральную плотность потока энергии Π_k^s с учетом упругого рассеяния звука вихрями, на важную роль которого указано в работе [123], возьмем в виде

$$\Pi_k^s = c_s k \left(\frac{k W_s}{k_{os} W_{os}} \right) k W_s, \quad (10.42)$$

где c_s — скорость звука. Плотность энергии вихрей в правой части (10.41) подставим из (10.40). Стационарное решение $W_s(k)$ уравнений (10.41), (10.42) для случая $|\gamma_{ss}| \lesssim 3\gamma_{sv}^{3/4} (c_s k_1)^{3/4}$, важного в приложении к МЗС, имеет экстремум в точке $k_{os} \approx 4 k_1/3$. Оно аппроксимируется соотношениями

$$W_s(k) = \begin{cases} W_{os} \left(\frac{k - k_1}{k_1} \right)^{3/2}, & k_1 \leq k < k_{os}, \\ W_{os} \left(\frac{k_{os}}{k} \right)^{3/2}, & k_{os} < k < k_d, \end{cases} \quad (10.43)$$

где

$$W_{os} \approx \frac{\gamma_{sv}}{c_s k_1} \frac{\gamma_{rv}^2 \rho_0}{(27)^{3/2} k_1^3}.$$

Стационарное распределение энтропийных волн в приближении $\Pi_k^e = 0$ имеет вид

$$W_e(k) \approx \frac{\gamma_{ev}}{|\gamma_{ee}|} W_v + \frac{\gamma_{es}}{|\gamma_{ee}|} W_s. \quad (10.44)$$

Обсудим теперь возможности приложения развитой модели к проблеме формирования турбулентности в диффузной МЗС. Характерные размеры диффузных областей НИ (теплой межоблачной среды) $l_1 \approx 5$ пк. Длина пробега частиц относительно кулоновского рассеяния в данной фазе $l_c \approx 3 \cdot 10^{13}$ см. Поэтому в интервале волновых чисел $k_1 < k < k_c$, где $k_{1,c} = 2\pi/l_{1,c}$, газодинамическое описание имеет смысл. Магнитное поле B при условии $\beta > 1$, где $\beta = 8\pi nT/B^2$, можно учесть по теории возмущений

при вычислении амплитуд волн, кроме того, его учет необходим для расчета декрементов затухания мод.

В плазме с $\beta \gg 1$ вихревой моде соответствует суперпозиция альвеновской и медленной магнитозвуковой волн, звуковой — быстрая магнитозвуковая волна, а зитропийная мода сохраняет вид и в МГД. Таким образом, для определения амплитуды возмущения магнитного поля δb_v в вихревой волне с амплитудой δv_v можно приблизительно пользоваться стандартным соотношением $\delta b_v = -\sqrt{4\pi\rho_0}\delta v_v$, в звуковой волне амплитуда поля лежит в плоскости k и V и имеет величину $\delta b_s \approx B\delta v_s/c_s$. Данные соотношения позволяют определить амплитуду спектров флуктуаций магнитного поля на основе (10.40) и (10.43). Так как в диффузных фазах МЗС $\beta \approx 1$, учет магнитного поля, основанный на теории возмущений, дает лишь порядковые соотношения.

Спектр флуктуаций поперечных компонент скорости и магнитного поля имеет вид (10.40). Амплитуда спектра (10.40) зависит от параметров ансамбля ударных волн и разрежений через величину $\gamma_{vv} \approx P_0(\mu_* - 1)^{-2}$ [30]. Величина P_0 определена в разд. 10.3 и равна 10^{-15} с^{-1} , $\mu_* - 1 \approx 3 \cdot 10^{-2}$ в теплой межоблачной среде, отсюда $\gamma_{vv} \approx 10^{-12} \text{ с}^{-1}$. При этом плотность энергии флуктуаций в (10.40) порядка плотности энергии тепловой плазмы. Спектр флуктуаций плотности имеет вид (10.43), причем $W_{0s} \approx 0,1 W_{0v}$, так как $\gamma_{sv} \approx c_s k_1$. Диссипативный масштаб k_d для спектра (10.40) можно определить, зная декремент вязкой диссипации вихревой моды: $\gamma_d = \eta_0 k^2$. Имеем $k_d \approx (\gamma_{vv}/\eta_0)^{1/2} k_1^{-1/2}$. В теплой межоблачной среде $\eta_0 \approx 3,6 \cdot 10^{18} \text{ см}^2/\text{с}$ [312]. Отсюда получим $k_d \gtrsim 10^{-14} \text{ см}^{-1}$. При $k > k_c$ МГД-волны переходят в бесстолкновительные ветви спектра, где законы затухания существенно иные, кроме этого, магнитное поле может привести к анизотропии мелкомасштабной турбулентности, что положено в основу модели турбулентности МЗС, предложенной в работе [268].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
2. *Аведисова В. С.* Образование туманностей звездами типа Вольфа—Райе // *Астрон. журн.* 1971. Т. 48. С. 894—901.
3. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы / Под ред. А. А. Рухадзе. М.: Высш. шк., 1978. 408 с.
4. *Алтынцев А. Т., Красов В. И., Лебедев Н. В., Паперный В. Л.* Формирование магнитных островов в токовом слое // *Письма в ЖЭТФ.* 1987. Т. 45. С. 17—20.
5. *Антипов С. В., Незлин М. В., Родионов В. К.* и др. Солитоны Россби: устойчивость, столкновения, асимметрия и генерация течениями со сдвигом скорости // *ЖЭТФ.* 1983. Т. 84. С. 1357—1372.
6. *Арнольд В. И., Коркина Е. И.* Рост магнитного поля в стационарном несжимаемом потоке // *Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика.* 1983. № 3. С. 43—46.
7. *Аршипов Н. И., Житлухин А. М., Сафронов В. Н.* и др. Бесстолкновительная ударная волна в сверхзвуковом плазменном потоке с $\beta \approx 1$ // *Письма в ЖЭТФ.* 1984. Т. 39. С. 205—207.
8. *Ахизер А. И., Ахизер И. А., Половин О. В.* и др. Электродинамика плазмы / Под ред. А. И. Ахизера. М.: Наука, 1974. 720 с.
9. *Баранов В. Б., Краснобаев К. В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.
10. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика: теория и приложения к геофизике, гидродинамике. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 255 с.
11. *Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л.* и др. Астрофизика космических лучей / Под ред. В. Л. Гинзбурга. М.: Наука, 1984. 356 с.
12. *Блинников С. И., Имшенник В. С., Утробин В. П.* Гигантский рентгеновский источник в Лебеде — остаток взрыва пекулярной сверхновой // *Письма в «Астрон. журн.».* 1982. Т. 8. С. 671—678.
13. *Блинников С. И., Лозинская Т. А., Чугай Н. Н.* Сверхновые звезды и остатки вспышек сверхновых // *Итоги науки и техники / Под ред. Р. А. Сюняева.* М.: ВИНТИ, 1987. Т. 32. С. 142—194.
14. *Блохинцев Д. И.* Акустика неоднородной движущейся среды. М.: Наука, 1981. 206 с.
15. *Боброва Н. А., Сыроватский С. И.* Разрывная неустойчивость одномерного бессилового магнитного поля в разреженной плазме // *Письма в ЖЭТФ.* 1979. Т. 30. С. 567—570.
16. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946. 137 с.
17. *Бочкарев Н. Г.* Межзвездная среда и звездообразование // *Звезды и звездные системы / Под ред. Д. Я. Мартынова.* М.: Наука, 1981. С. 265—325.
18. *Бочкарев Н. Г.* Строение местной межзвездной среды и источники мягкого рентгеновского фонового излучения // *Астрон. журн.* 1987. Т. 64. С. 38—51.
19. *Брагинский С. И.* Явления переноса в плазме // *Вопросы теории плазмы / Под ред. М. А. Леонтовича.* М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183—272.
20. *Брагинский С. И.* О самовозбуждении магнитного поля при движении хорошо проводящей жидкости // *ЖЭТФ.* 1964. Т. 47. С. 1084—1098.
21. *Бредов М. М., Румянцев В. В., Топтыгин И. Н.* Классическая электродинамика / Под ред. И. Н. Топтыгина. М.: Наука, 1985. 400 с.

22. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / Под ред. Г. Гроше, В. Циглера. Лейпциг: Тойбнер; М.: Наука, 1981. 721 с.
23. *Буланов С. В., Бутов И. Я., Гваладзе Ю. С.* и др. Пинчевые разряды в плазме вблизи сепаратричных поверхностей магнитного поля // *Физика плазмы*. 1986. Т. 12. С. 309—327.
24. *Буланов С. В., Дозель В. А., Франк А. Г.* Солнечные вспышки и лабораторные эксперименты по магнитному пересоединению в токовых слоях // *Письма в «Астрон. журн.»*. 1984. Т. 10. С. 149—153.
25. *Буланов С. В., Сасоров П. В.* Разрывная неустойчивость токового слоя бесстолкновительной плазмы // *Физика плазмы*. 1978. Т. 3. С. 640—647.
26. *Быков А. М.* Межзвездная турбулентность и ударные волны // *Письма в «Астрон. журн.»*. 1982. Т. 8. С. 596—599.
27. *Быков А. М.* К теории формирования турбулентности в межзвездной среде // Там же. 1988. Т. 14. С. 145—150.
28. *Быков А. М., Топтыгин И. Н.* Ускорение частиц крупномасштабными сверхзвуковыми и дозвуковыми движениями турбулентной плазмы // *Изв. АН СССР. Сер. физ.* 1980. Т. 44. С. 2574—2587.
29. *Быков А. М., Топтыгин И. Н.* Генерация турбулентности ударными волнами и диффузия космических лучей в межзвездной среде // *Письма в «Астрон. журн.»*. 1985. Т. 11. С. 184—189.
30. *Быков А. М., Ушаков А. Ю.* Статистические свойства турбулентности, формируемой ансамблем ударных волн: Препр. ФТИ № 1059. Л., 1986. 28 с.
31. *Быков А. М., Яковлев Д. Г.* Распространение ударных волн в турбулентной среде и мерцания радиоизлучения пульсаров: Препр. ФТИ № 782. Л., 1982. 28 с.
32. *Бэтчелор Дж. К.* Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 150 с.
33. *Бэтчелор Дж. К.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
34. *Вайнштейн С. И.* Об электропроводности газа в турбулентной среде // *Астрон. журн.* 1968. Т. 45. С. 738—742.
35. *Вайнштейн С. И.* «Антидинамо» — возможный механизм явлений, происходящих в нейтральных слоях магнитного поля // *ЖЭТФ*. 1973. Т. 65. С. 550—561.
36. *Вайнштейн С. И.* МГД-эффекты в турбулентной среде с неоднородной плотностью // *Магнит. гидродинамика*. 1978. № 1. С. 45—50.
37. *Вайнштейн С. И.* Возможное объяснение тонкой структуры магнитных полей на Солнце // *Астрон. журн.* 1979. Т. 56. С. 1297—1302.
38. *Вайнштейн С. И.* Магнитные поля в космосе. М.: Наука, 1983. 238 с.
39. *Вайнштейн С. И.* Динамика магнитных полей промежуточного масштаба // *Магнит. гидродинамика*. 1983. № 2. С. 14—20.
40. *Вайнштейн С. И.* Формирование токовых слоев в неравновесных магнитных конфигурациях // *ЖЭТФ*. 1984. Т. 86. С. 451—461.
41. *Вайнштейн С. И.* Магнитная гидродинамика космической плазмы и токовые слои. М.: Наука, 1985. 192 с.
42. *Вайнштейн С. И.* Об уединенных вихрях в магнитной гидродинамике // *Магнит. гидродинамика*. 1985. № 4. С. 72—79.
43. *Вайнштейн С. И.* Обобщенные уравнения Колмогорова — Фоккера — Планка в теории турбулентности // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1986. Т. 29. С. 155—163.
44. *Вайнштейн С. И.* Образование токовых слоев в результате взаимодействия уединенных вихрей в магнитной гидродинамике // *Магнит. гидродинамика*. 1986. № 1. С. 25—30.
45. *Вайнштейн С. И.* О статистических характеристиках смещений жидких частиц // *Изв. вузов. Радиофизика*. 1987. Т. 30. С. 991—997.
46. *Вайнштейн С. И.* Динамическая диссипация тороидальных полей // *Магнит. гидродинамика*. 1987. № 4. С. 8—14.
47. *Вайнштейн С. И.* Потеря равновесия вытянутых магнитных конфигураций // *ЖЭТФ*. 1987. Т. 92. С. 2050—2059.
48. *Вайнштейн С. И.* Формирование токовых слоев в магнитных неоднородностях

- родностях солнечного ветра // Геоматнетизм и аэрономия. 1987. Т. 27. С. 529—535.
49. *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б.* О происхождении магнитных полей в астрофизике // УФН. 1972. Т. 106. С. 431—457.
 50. *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Турбулентно: динамо в астрофизике. М.: Наука, 1980. 352 с.
 51. *Великович А. Л., Либерман М. А.* Физика ударных волн в газах и плазме / Под ред. Я. Б. Зельдовича. М.: Наука, 1987. 296 с.
 52. *Волков Т. Ф.* Гидродинамическое описание сильно разреженной плазмы // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 3—80.
 53. *Воицкиков Н. В.* Межзвездная пыль // Итоги науки и техники. Сер. Исследование космического пространства. М.: ВИНТИ, 1986. С. 98—204.
 54. *Гайлитис А. К., Фрейберг Я. Ж.* Расчет динамо-неустойчивости винтового потока: Препр. ЛАФИ-004. Рига, 1977. 48 с.
 55. *Галеев А. А., Зеленый Л. М.* Разрывная неустойчивость в плазменных конфигурациях // ЖЭТФ. 1976. Т. 70. С. 2133—2151.
 - 55а. *Галеев А. А., Полюдов А. Н., Сагдеев Р. З.* и др. Магнитогидродинамическая турбулентность в солнечном ветре, взаимодействующем с кометой // Там же. 1987. Т. 92. С. 2090—2105.
 - 55б. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Модель ударной волны в плазме солнечного ветра // Там же. 1969. Т. 57. С. 1047—1053.
 56. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы // Вопросы теории плазмы. 1973. Вып. 7. С. 3—145.
 57. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Теория слабой турбулентности плазмы // Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 590—638.
 58. *Герджиков В. С., Иванов М. И., Кулиш П. П.* Квадратичный пучок и нелинейные уравнения // ТМФ. 1980. Т. 44. С. 342—357.
 59. *Гершберг Р. Е., Могилевский Э. И., Обридко В. Н.* Энергетика активности вспыхивающих звезд и Солнца: синергетический подход: Препр. ИЗМИРАН № 41. М., 1986. 26 с.
 60. *Гетлинг А. В.* О взаимодействии вихрей конечного размера в вязкой жидкости: Препр. НИИЯФ МГУ 87-016. М., 1987. 27 с.
 61. *Гинзбург В. Л., Итускин В. С.* Происхождение космических лучей // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия / Под ред. Р. А. Сюняева. М.: ВИНТИ, 1983. Т. 24. С. 94—182.
 62. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* Происхождение космических лучей. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 384 с.
 63. *Горбацкий В. Г.* Космическая газодинамика. М.: Наука, 1977. 360 с.
 64. *Госачинский И. В., Херсонский В. К.* Распределение нейтрального водорода в области туманности «Розетка» и звездной ассоциации Единорог OB 2 // Астрон. журн. 1982. Т. 59. С. 237—245.
 65. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
 66. *Гурбатов С. Н., Саичев А. И., Якушкин И. Г.* Нелинейные волны и одномерная турбулентность в средах без дисперсии // УФН. 1983. Т. 141. С. 221—256.
 67. *Гуревич А. В., Мещеркин А. П.* Солитонные фронты ударных волн и автомодельные разрывы в дисперсионной гидродинамике // Тр. ФИАН. 1986. Т. 165. С. 207—228.
 68. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 590—604.
 69. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Усредненное описание волн в уравнении Кортевега—де Вриза—Бюргера // Там же. 1987. Т. 93. С. 871—880.
 70. *Данжи Дж.* Космическая электродинамика. М.: Госатомиздат, 1961. 206 с.
 71. *Данилов Ю. А., Петвиашвили В. И.* Солитоны в плазме // Итоги науки и техники. Сер. Физика плазмы. М.: ВИНТИ, 1983. С. 5—47.
 72. *Догель В. А., Шаров Г. С.* Некоторые модели ускорения космических лучей в гигантских молекулярных облаках: Препр. ФИАН № 35. М., 1985. 30 с.

73. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. С. 288—296.
74. Жданов С. К., Трубников Б. А. «Газовое» приближение в нелинейной теории устойчивости солитонов Кортевега—де Вриза // Там же. 1987. Т. 92. С. 1612—1617.
75. Захаров В. Е. Неустойчивость и нелинейность колебания солитонов // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 364—367.
76. Захаров В. Е. Колмогоровские спектры в задачах слабой турбулентности // Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1984. Т. 2. С. 48—79.
77. Захаров В. Е., Манакос С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
78. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. О спектре акустической турбулентности // ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 297—301.
79. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118—134.
80. Зельдович Я. Б. Магнитное поле в проводящей турбулентной жидкости // Там же. 1956. Т. 31. С. 154—155.
81. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 574 с.
82. Иванов К. Г., Харшладзе А. Ф. О силе вытягивания магнитных облаков во время солнечных вспышек и магнитосферных суббурь // Геомагнетизм и аэронавигация. 1984. Т. 24. С. 177—181.
83. Имшенник В. С. Структура ударных волн в плотной высокотемпературной плазме // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 201—217.
84. Имшенник В. С., Надежин Д. К. Конечные стадии эволюции звезд и вспышки сверхновых // Итоги науки и техники. Сер. Астрономия / Под ред. Р. А. Сюняева. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 21. С. 63—123.
85. Кадомцев Б. Б. О неустойчивости срыва в токамаках // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 710—715.
86. Кадомцев Б. Б. Перезамыкание силовых линий в магнитной гидродинамике // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 131—150.
87. Кадомцев Б. Б. Перезамыкание магнитных силовых линий // УФН. 1987. Т. 151. С. 3—29.
88. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И. Нелинейные волны // Там же. 1971. Т. 103. С. 193—232.
89. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах // ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 753—756.
90. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. О звуковой турбулентности // Там же. 1972. Т. 208. С. 794—797.
91. Калсруд Р. Магнитогидродинамическое описание плазмы // Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галева, Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 1. С. 122—152.
92. Каплан С. А. Межзвездная газодинамика. М.: Физматгиз, 1958. 177 с.
93. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Физика межзвездной среды. М.: Наука, 1979. 591 с.
94. Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н. Физика плазмы солнечной атмосферы. М.: Наука, 1977. 256 с.
95. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 176 с.
96. Кичатинов Л. Л. Задача о магнитном поле в сверхзвуковом потоке // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26. С. 573—578.
97. Кичатинов Л. Л. Задача о дифференциальном вращении Солнца: неоднородность вместо анизотропии // Письма в «Астрон. журн.». 1986. Т. 12. С. 410—416.
98. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы. М.: Наука, 1975. 352 с.
99. Колмогоров А. Н. Локальные свойства турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30. С. 299—303.

100. *Конторович В. М.* Отражение и преломление звука на ударных волнах // *Акуст. журн.* 1959. Т. 5. С. 314—323.
101. *Коржов Н. П.* Структурные особенности гелиомагнитосферы // *Прогнозирование состояния магнитосферы.* М.: Наука, 1980. С. 10—11.
102. *Коробейников В. П.* Задача о сильном точечном взрыве в газе при нулевом градиенте температуры // *ДАН СССР.* 1956. Т. 109. С. 271—273.
103. *Кролл Н., Тралейнис А.* Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975. 527 с.
104. *Кропачев Э. П.* Роторные механизмы динамо и геомагнитное поле. М.: ИЗМИРАН, 1983. 202 с.
105. *Кузнецов Е. А., Мушер С. Л.* Влияние коллапса звуковых волн на структуру бесстолкновительных ударных волн в замагниченной плазме // *ЖЭТФ.* 1986. Т. 91. С. 1605—1619.
106. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 207 с.
107. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. Т. 1. 476 с.
108. *Ландау Л. Д.* Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения // *ПММ.* 1945. Т. 9. С. 286—290.
109. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
110. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика, нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974. 752 с.
111. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976. Ч. 1. 584 с.
112. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
113. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
114. *Липеровский В. А., Пудовкин М. И.* Аномальное сопротивление и двойные слои в магнитосферной плазме. М.: Наука, 1983. 180 с.
115. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 527 с.
116. *Ломинадзе Дж. Г., Чагелишвили Г. Д.* Тепловая конвекция в аккреционном диске черных дыр // *Астрон. журн.* 1981. Т. 61. С. 290—298.
117. *Лэм Дж.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
118. *Мазур В. А.* Разрывная неустойчивость плоского нейтрального слоя в бесстолкновительной плазме // *Исследования по геомагнетизму, аэронауке и физике Солнца.* М.: Наука, 1979. Вып. 46. С. 130—137.
119. *Мирабель А. И., Монин А. С.* Двумерная турбулентность // *Успехи механики.* 1979. Т. 2. С. 47—95.
120. *Михайловский А. Б., Петвишвили В. И., Фридман А. М.* Альфвеновский солитон // *Письма в ЖЭТФ.* 1976. Т. 24. С. 53—56.
121. *Михайловский А. Б., Смоляков А. И.* К теории низкочастотных магнитозвуковых солитонов // *ЖЭТФ.* 1985. Т. 88. С. 189—204.
122. *Мозилевский Э. И.* Гипотеза о корпускулярных солнечных потоках с бессильными магнитными полями // *Геомагнетизм и аэронаука.* 1962. Т. 2. С. 48—55.
123. *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В. и др.* Влияние вихрей на спектр акустической турбулентности // *Нелинейные волны.* М.: Наука, 1979. С. 105—115.
124. *Молоденский М. М.* Построение бессильной модели магнитного поля пятна // *Астрон. журн.* 1966. Т. 43. С. 727—731.
125. *Молоденский М. М.* Об интегральных свойствах бессильных полей // Там же. 1968. Т. 45. С. 732—737.
126. *Монин А. С.* О природе турбулентности // *УФН.* 1978. Т. 125. С. 97—122.
127. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 639 с.
128. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1967. Ч. 2. 720 с.
129. *Незлин М. В.* Солитоны России // *УФН.* 1986. Т. 150. С. 3—60.
130. *Нелинейные волны.* М.: Мир, 1977. 320 с.
131. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.

132. *Паркер Е. Н.* Космические магнитные поля. М.: Мир, 1982. Ч. 1. 608 с.; Ч. 2. 479 с.
133. *Пела Р.* Слияние магнитных островов // Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 204—208.
134. *Петвиашвили В. И.* Нелинейные волны и солитоны // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1979. Вып. 9. С. 59—82.
135. *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А.* Альфвеновские и магнитозвуковые вихри в плазме // ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 498—505.
136. *Петвиашвили В. И., Яньков В. В.* Солитоны и турбулентность // Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1985. Вып. 14. С. 3—55.
- ✓137. *Пиддингтон Дж. Г.* Солнечные магнитные поля и конвекция // Проблемы солнечной активности. М.: Мир, 1979. С. 173—202.
138. *Пикельнер С. Б.* Основы космической электродинамики. М.: Наука, 1966. 408 с.
139. *Плиева Н. А.* Магнитная гидродинамика средних полей в анизотропной турбулентной среде // Магнит, гидродинамика. 1986. № 2. С. 23—28.
140. *Пономаренко Ю. Е.* К теории гидромагнитного динамо // ЖПМТФ. 1973. № 6. С. 47—51.
141. *Прист Э. Р.* Солнечная магнитогидродинамика. М.: Мир, 1985. 592 с.
142. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1967. 496 с.
- ✓143. *Птушкин В. С.* Движение газа быстрых заряженных частиц, диффундирующих в среде со стохастическим магнитным полем // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 483—486.
144. *Птушкин В. С.* Гидродинамика межзвездной среды с учетом космических лучей // Тр. междунар. школы по плазменной астрофизике. Сухуми, 1986. С. 279—286.
145. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентность // УФН. 1978. Т. 125. С. 123—167.
146. *Руденчик Е. А.* Перенос вещества МГД-волнами в звездных атмосферах // Письма в «Астрон. журн». 1983. Т. 9. С. 504—507.
147. *Руденчик Е. А.* Перенос массы, энергии и импульса цугами МГД-волн через двумерную неоднородную среду // Физика солнечной активности. М.: ИЗМИРАН, 1983. С. 12—29.
148. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. Ч. 1. 496 с.
149. *Сагдеев Р. З.* Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4. С. 20—80.
150. *Седов Л. И.* О неустановившемся движении сжимаемой жидкости // ДАН СССР. 1945. Т. 47. С. 94—96.
151. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1987. 489 с.
152. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971. 331 с.
153. *Скотт А., Чу Ф., Маклафлин Д.* Солитон — новое понятие в прикладных науках // Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложениях к электронике. М.: Сов. радио, 1977. С. 215—284.
154. Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. М.: Мир, 1981. 312 с.
155. *Сутырин Г. Г.* К теории уединенных антициклонов во вращающейся жидкости // ДАН СССР. 1985. Т. 280. С. 1101—1105.
156. *Сутырин Г. Г., Юшина И. Г.* Взаимодействие синоптических вихрей конечной амплитуды // Там же. 1986. Т. 288. С. 585—589.
157. *Сыроватский С. И.* Динамическая диссипация энергии в окрестности нейтральной линии магнитного поля // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 1133—1147.
158. *Тазтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986. 528 с.
159. *Темный В. В., Застенкер Г. Н., Еременко Е. Г.* и др. Энергетические характеристики сильной солнечной вспышки 4.VIII.72 // Космич. исслед. 1977. Т. 15. С. 212—222.

160. *Топтыгин И. Н.* Магнитогидродинамические волны в плазме солнечного ветра // Изв. вузов. Радиофизика. 1973. Т. 16. С. 974—980.
161. *Топтыгин И. Н.* Космические лучи в межзвездных магнитных полях. М.: Наука, 1983. 302 с.
162. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
163. *Фомин И. П., Юревич Л. В.* К теории инверсии геомагнитного поля: Препр. ИТВ-83-53Р. Киев, 1983. 23 с.
164. *Хруслев Е. Я.* Распад начального возмущения типа ступеньки в уравнении Кортевега—де Вриза // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21. С. 469—472.
165. *Цап Т. Т., Лаба И. С.* Магнитные поля и вертикальные движения в супергранулах // Изв. Крым. астрофиз. обсерватории. 1985. Т. 73. С. 62—70.
166. *Чашей В. И., Шишов В. И.* О турбулентности межпланетной плазмы // Геомагнетизм и аэронавигация. 1977. Т. 17. С. 984—993.
167. *Чашей В. И., Шишов В. И.* О механизме формирования спектра турбулентности межпланетной плазмы // Письма в «Астрон. журн.». 1981. Т. 7. С. 500—504.
168. *Шапиро В. Е., Логинов В. М.* Динамические системы при случайных воздействиях. Новосибирск: Наука, 1983. 160 с.
169. *Шапировская Н. Я., Бочаров А. А.* Две фазы межзвездной среды. Распределение рассеивающей среды по Галактике // Астрон. журн. 1986. Т. 63. С. 666—673.
170. *Шафранов В. Д.* Равновесие плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 2. С. 92—176.
171. *Шишов В. И.* Долгопериодическая переменность интенсивности пульсаров и вид спектра неоднородностей межзвездной плазмы // Письма в «Астрон. журн.». 1987. Т. 13. С. 199—203.
172. *Янке Ё., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1986. 344 с.
173. *Altynsev A. T., Bardakov V. M., Krasov V. I. et al.* Laboratory simulation of energy released in solar flares // Solar Phys. 1986. Vol. 106. P. 131—145.
174. *Aly J. J.* On some properties of force-free magnetic fields in infinite regions of space // Astrophys. J. 1984. Vol. 283. P. 349—362.
175. *Aly J. J.* Quasi-static evolution of sheared force-free field and the solar flare problem // Astron. and Astrophys. 1985. Vol. 143. P. 19—22.
176. *Aly J. J.* Evolving magnetostatic equilibria: Prepr. Service d'Astrophys. France, 1986. 17 p.
177. *Antonucci E.* Solar rotating magnetic dipole?: Prepr. Inst. Plasma Res. Stanford Univ. N 570. Stanford (USA), 1974. 26 p.
178. *Antonucci E., Doderо M. A., Peres G. et al.* Hydrodynamics of coronal loops: a comparison of observed and simulated spectra emitted from flaring coronal loops // Adv. Space Res. 1986. Vol. 6. P. 151—154.
179. *Armstrong J. W., Cordes J. M., Rickett B. J.* Density power spectrum in the local interstellar medium / Nature. 1981. Vol. 291. P. 561—564.
180. *Arons J.* Astrophysical implication of reconnection // Magnetic reconnection in space and laboratory plasmas / Ed. E. W. Honnes (Jun.). Wash. (D. C.), 1984. P. 366—368.
181. *Arter W.* Magnetic flux transport by convecting layer-topological, geometrical and compressible phenomena // J. Fluid Mech. 1983. Vol. 132. P. 25—48.
182. *Arter W.* Topological magnetic flux pumping revisited // Solar and stellar magnetic fields: Origins and coronal effects / Ed. J. O. Stenflo. Dordrecht etc.: Reidel, 1983. P. 243—246.
183. *Arter W., Proctor M. R. E., Galloway D. J.* New results on the mechanism of magnetic flux pumping by three dimensional convection // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1982. Vol. 201. P. 57—61.
184. *Axford W. I.* Acceleration of cosmic rays by shock waves // Proc. 17th Intern. Cosmic Ray Conf. Paris, 1981. Vol. 12. P. 155—203.
185. *Backus G. E.* A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos // Ann. Phys. (USA). 1958. Vol. 4. P. 372—447.

186. *Baker D. A.* The role of magnetic reconnection phenomena in the reversed-field pinch // *Magnetic reconnection in space and laboratory plasmas* / Ed. E. W. Honnes (Jun.). Wash. (D. C.), 1984. P. 332—340.
187. *Batchelor G. K.* On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1950. Vol. 201. P. 405—420.
188. *Batchelor G. K., Townsend A. A.* The nature of turbulent motion at large wave-number // *Ibid.* 1949. Vol. 199. P. 238—255.
189. *Baum P. J., Bratenahl A.* Rapid magnetic flux transport in laboratory and plasmas: Prepr. UCR/IGPP-82/7. Riverside (Cal), 1982. 28 p.
190. *Baum P. J., Bratenahl A.* The laboratory magnetosphere // *Geophys. Res. Lett.* 1982. Vol. 9. P. 435—438.
191. *Bavassano B., Dobrovolny M., Mariani F.* et al. Radial evolution of power spectra of interplanetary Alfvénic turbulence // *J. Geophys. Res. A.* 1982. Vol. 87. P. 3617—3624.
192. *Bavassano B., Smiths E. J.* Radial variations of interplanetary Alfvénic fluctuations: Pioneer 10 and 11 observations between 1 and 5 AU // *Ibid.* 1986. Vol. 91. P. 1706—1710.
193. *Bavassano B., Smiths E. J., Tsurutani B. T.* Pioneer 10 and 11 observations of waves upstream of interplanetary corotating shocks // *Ibid.* 1987. Vol. 92. P. 285—290.
194. *Bavassano Cattaneo M. B., Tsurutani B. T., Smiths E. J.* Subcritical an supercritical interplanetary shocks: magnetic fields and energetic particle observations // *Ibid.* 1986. Vol. 91. P. 11929—11935.
195. *Birn J., Goldstein H., Schindler K.* A theory of the onset of solar eruptive processes // *Solar Phys.* 1978. Vol. 57. P. 81—101.
196. *Birn J., Schindler K.* Self-consistent theory of three-dimensional convection in the geomagnetic tail // *J. Geophys. Res. A.* 1983. Vol. 88. P. 6969—6980.
197. *Biskamp D.* Dynamics of a resistive sheet pinch // *Ztschr. Naturforsch. A.* 1982. Bd. 37. S. 840—847.
198. *Biskamp D.* Resistive MHD processes // *Phys. scr.* 1982. Vol. T2/2 P. 405—409.
199. *Biskamp D.* Magnetic reconnection across an X-type neutral point slow shocks versus current sheets // *Phys. Lett. A.* 1984. Vol. 105. P. 124—128.
200. *Biskamp D.* Magnetic reconnection via current sheets // *Phys. Fluids.* 1986. Vol. 29. P. 1520—1531.
201. *Biskamp D., Welter H.* Coalescence of magnetic islands // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 44. P. 1069—1072.
202. *Blake M. L., Sturrok P. A.* Spicules and surges // *Astrophys. J.* 1985. Vol. 290. P. 359—368.
203. *Bladford R. D., Ostriker J. P.* Supernova shock acceleration of cosmic rays in the Galaxy // *Ibid.* 1980. Vol. 237. P. 793—808.
204. *Bohachevsky I. O.* Simple waves and shocks in magnetohydrodynamics // *Phys. Fluids.* 1962. Vol. 5. P. 1456—1467.
205. *Bondi H., Gold T.* On the generation of magnetism by fluid motion // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1950. Vol. 110. P. 607—611.
206. *Brodsky Yu. A.* Analysis of geodynamo equations by means of perturbation theory // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.* 1982. Vol. 22. P. 281—304.
207. *Buechner J., Zeleny L. M.* Stochastization of particle's motion near a magnetic field reversal and the problem of explosive reconnection // *Proc. Plasma Astrophys. Course and Workshop. Sukhumi*, 1986. P. 195—201.
208. *Burlaga L. P.* Magnetic fields, plasma and coronal holes: the inner solar system // *Space Sci. Rev.* 1979. Vol. 23. P. 201—216.
209. *Burlaga L. P.* MHD processes in the outer heliosphere // *Ibid.* 1984. Vol. 39. P. 255—316.
210. *Burlaga L. P., Klein L. W.* Fractal structure of the interplanetary magnetic field // *J. Geophys. Res. A.* 1986. Vol. 91. P. 347—350.
211. *Burlaga L. P., Klein L. W., Lepping R. P.* et al. Large-scale interplanetary magnetic field: Voyager 1 and 2 observations between 1 and 9,5 AU // *Ibid.* 1984. Vol. 89. P. 10.659—10.668.

212. *Burlaga L. P., Lemaire J. F., Turner J. M.* Interplanetary current sheets at 1 AU // *Ibid.* 1978. Vol. 82. P. 3191—3200.
213. *Burlaga L. P., Mish W. H.* Large-scale fluctuations in the interplanetary medium // *Ibid.* 1987. Vol. 92. P. 1261—1266.
214. *Busse F. H.* Theory of planetary dynamo // *Solar system plasma physics* // Ed. C. F. Kennel, L. Lenzerotti, E. Parker. North-Holland, 1979. P. 293—317.
215. *Bykov A. M., Toptygin I. N.* Shock-wave turbulence in interstellar medium and observed parameters of cosmic rays // *Proc. 20th Intern. Cosmic Ray Conf. Moscow, 1987.* Vol. 2. F. P. 107—110.
216. *Bykov A. M., Toptygin I. N.* Generation of turbulence by shock wave in interstellar medium and cosmic ray dynamics // *Astrophys. Space Sci.* 1987. Vol. 138. P. 341—354.
217. *Canfield R. C.* Impulsive phase explosive dynamics // *Adv. Space Res.* 1986. Vol. 6. P. 167—176.
218. *Caramana E. J., Nebel R. A., Schanck D. D.* Nonlinear single helicity magnetic reconnection in the RFP // *Phys. Fluids.* 1983. Vol. 26. P. 1305—1319.
219. *Cesarsky C. J.* Cosmic ray confinement in the Galaxy // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1980. Vol. 18. P. 289—319.
220. *Chageleshvily G. D., Lominadze J. G.* Thermal convection and magnetic fields in accretion disk of black hole // *Proc. Course and Workshop on Plasma Astrophys. Varenna (Italy), 1984.* P. 131—138.
221. *Chevalier R. A.* The interaction of supernovae with the interstellar medium // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1977. Vol. 15. P. 175—196.
222. *Childress S.* New solution of the kinematic dynamo problem // *J. Math. Phys.* 1970. Vol. 11. P. 3063—3076.
223. *Colgate S. A.* A phenomenological model of solar flares // *Astrophys. J.* 1978. Vol. 221. P. 1068—1074.
224. *Cordes J. M., Weisberg J. W., Boriakoff Y.* Small-scale electron density turbulence in the interstellar medium // *Ibid.* 1985. Vol. 288. P. 221—247.
225. *Coroniti F. V.* On the magnetic viscosity in Keplerian disks // *Ibid.* 1981. Vol. 244. P. 587—599.
226. *Cowie L. L., Songaila A.* High resolution optical and ultraviolet absorption-line studies of interstellar gas // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1986. Vol. 24. P. 499—535.
227. *Cowling T. D.* The magnetic fields of sunspot // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1934. Vol. 94. P. 39—48.
228. *Cox D. R., Reynolds R. J.* The local interstellar medium // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1987. Vol. 25. P. 303—344.
229. *Crutcher R. M., Kazes I., Troland T. H.* Magnetic field strengths in molecular clouds // *Astron. and Astrophys.* 1987. Vol. 181. P. 119—126.
230. *Cuong P. G., Busse F. H.* Generation of magnetic fields by convection in a rotating sphere // *Phys. Earth and Planet. Inter.* 1981. Vol. 24. P. 272—283.
231. *Dahlburg R. B., Zang T. A., Montgomery D.* et al. Viscous, resistive and stability computed by spherical techniques: Prepr. Langley Res. Center. Hampton (USA), 1983. 28 p.
232. *Dame T. M., Elmegreen B. G., Cohen R. S.* et al. The largest molecular cloud complexes in the first galactic quadrant // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 305. P. 892—908.
233. *Dombre T., Frisch U., Dreene J. M.* et al. Chaotic streamlines and Lagrangian turbulence: the ABC flows // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 167. P. 353—360.]
234. *Dratne B. T., Salpeter E. E.* Destruction mechanism for interstellar dust // *Astrophys. J.* 1979. Vol. 231. P. 438—455.
235. *Drake J. F.* Magnetic reconnection and anomalous transport processes // *Magnetic reconnection in space and laboratory plasma* / Ed. E. W. Hones (Jun). Wash. (D. C.), 1984. P. 61—62.
236. *Drobyshevski E. M.* Magnetic field transfer by two-dimensional convec-

- tion and solar «semi-dynamo» // *Astrophys. and Space Sci.* 1977. Vol. 46, P. 41—49.
237. *Drobyshevski E. M., Yuferev V. S.* Topological pumping of magnetic flux by three-dimensional convection // *J. Fluid Mech.* 1974. Vol. 65, P. 33—44.
238. *Durney B. R.* The solar differential rotation // *Workshop on solar rotation* / Ed. G. Belvedere, L. Paterno. Catania, 1978. P. 301—324.
239. *Durney B. R.* The generalization of mixing length theory to rotation convection zones and applications to the Sun: Prepr. of Nat. Solar Observ. and Nat. Opt. Astron. Observ. Tucson (USA), 1987. 28 p.
240. *Edmiston J. P., Kennel C. F.* A parametric study of first critical Mach number for a fast MHD shocks // *J. Plasma Phys.* 1985. Vol. 32, P. 429—443.
241. *Edwards S. F.* The statistical dynamics of homogeneous turbulence // *J. Fluid Mech.* 1964. Vol. 18. P. 239—273.
242. *Elsasser W. M.* Introduction effects in terrestrial magnetism // *Phys. Rev.* 1946. Vol. 69. P. 106—116.
243. *Eselevich V. G.* Shock-wave structure in collisionless plasmas from results of laboratory experiments // *Space Sci. Rev.* 1982. Vol. 32. P. 56—81.
244. *Field G. B.* Theory of interstellar medium // *Highlights of modern astrophysics. Concepts and controversies* / Ed. S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky. S. l.: Wiley, 1986. P. 235—265.
245. *Forbest T. G., Priest E. R.* A numerical experiment relevant to line-tied reconnection in two-ribbon flares // *Solar Phys.* 1983. Vol. 84. P. 169—180.
246. *Forsslund D. W., Freiberg J. P.* Theory of laminar collisionless shocks // *Phys. Rev. Lett.* 1971. Vol. 27. P. 1189—1193.
247. *Frisch U., Pouquet A., Meneguzzi M.* Helical and nonhelical dynamos // *Solar and stellar magnetic fields: Origins and coronal effects* / Ed. J. O. Stenflo. Dordrecht etc.: Reidel, 1983. P. 271.
248. *Frisch U., Sulem P.-L., Nelkin M.* A simple dynamical model of intermittent fully developed turbulence // *J. Fluid Mech.* 1978. Vol. 87, P. 719—725.
249. *Galeev A. A.* Reconnection in magnetotail // *Space Sci. Rev.* 1979. Vol. 23, P. 411—425.
250. *Galeev A. A., Kuznetsov M. M., Zeleny L. M.* Magnetopause stability threshold for patchy reconnection // *Ibid.* 1986. Vol. 44. P. 1—42.
251. *Galeev A. A., Zeleny L. M.* Magnetic reconnection in a space plasma: Prepr. Space Res. Inst. N D-249. Moscow, 1977. 42 p.
252. *Galloway D., Frisch U.* Dynamo action in a family of flows with chaotic streamlines // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.* 1984. Vol. 29, P. 13—20.
253. *Galloway D. J., Proctor M. R. E.* The kinematics of hexagonal magnetoconvection // *Ibid.* 1983. Vol. 23. P. 109—136.
254. *Gardner C. S., Green J. M., Kruscal M. D.* et al. Method of solving the Korteweg + de Vries equation // *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 19, P. 1095—1097.
255. *Gardner C. S., Green J. M., Kruscal M. D.* et al. Korteweg + de Vries and generalizations: Method for exact solution // *Commun. Pure and Appl. Math.* 1974. Vol. 27. P. 97—107.
256. *Gilman P. A.* Dynamically consistent nonlinear dynamos driven by convection in the rotating spherical shell. II. Dynamo with cycles and strong feedbacks // *Astrophys. J. Suppl.* 1983. Vol. 53. P. 243—268.
257. *Gilman P.* Dynamos of the Sun and stars and associated convection zone dynamics // *Solar and stellar magnetic fields: Origins and coronal effects* / Ed. J. O. Stenflo. Dordrecht etc.: Reidel, 1983. P. 247—270.
258. *Gosling J. T., Bame S. J., Feldman W. C.* et al. Supraterminal ions upstream from interplanetary shocks // *J. Geophys. Res.* A. 1984. Vol. 39, P. 5409—5418.
259. *Grappin R.* Onset and decay of two-dimensional MHD turbulence with velocity-magnetic field correlation // *Phys. Fluids.* 1986. Vol. 29 / P. 2433—2443.

260. *Grappin R., Frisch U., Leorat J. et al.* Alfvénic fluctuations as asymptotic states of MHD turbulence // *Astron. and Astrophys.* 1982. Vol. 105. P. 6—14.
261. *Grigoryev V. M.* Some problems in the study of large-scale magnetic fields on the Sun: Prepr. SibIZMIR N 26-87. Irkutsk, 1987. 30 p.
262. *Hagyard M. J., Rabin D. M.* Measurement and interpretation of magnetic sphere in solar active regions // *Adv. Space Res.* 1986. Vol. 6.
263. *Heiles C.* HI shells and supershells // *Supernova remnant and their X-ray emission* // Ed. J. Danziger, P. Gorenstien. Dordrecht etc.: Reidel, 1983. P. 367—372.
264. *Heiles C.* Supernovae versus models of the interstellar medium and the gaseous halo // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 309. P. 342—362.
265. *Heiles C.* Interstellar magnetic fields // *Phys. processes in interstellar clouds* / Ed. G. E. Morfill, M. Sholer. Dordrecht etc.: Reidel, 1987. P. 429—452.
266. *Herring J. R.* Self-consistent field approach to turbulent theory // *Phys. Fluids.* 1965. Vol. 8. P. 2219—2225.
267. *Herzenberg A.* Geomagnetic dynamo // *Phil. Trans. Roy. Soc. London A.* 1958. Vol. 250. P. 543—585.
268. *Higdon J. C.* Density fluctuations in the interstellar medium: evidence for anisotropic magnetogasdynamic turbulence // *Astrophys. J.* 1984. Vol. 285. P. 109—123.
269. *Hohm T. S., Kulsrud R. M.* Forced magnetic reconnection // *Phys. Fluids.* 1985. Vol. 28. P. 2412—2418.
270. *Hornung H.* Regular and Mach reflection of shock waves // *Annu. Rev. Fluid. Mech.* 1986. Vol. 18. P. 33—58.
271. *Howard R., LeBonte B. J.* The Sun is observed to be a torsional oscillator with a period of 11 years // *Astrophys. J. Lett.* 1980. Vol. 239. P. L33—L36.
272. *Ikeuchi S., Habe A., Tanaka Y.* The interstellar medium regulated by supernova remnants and bursts of star formation // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1984. Vol. 207. P. 909—927.
273. *Ikeuchi S., Spitzer L.* Scattering of shocks by spherical cloud // *Astrophys. J.* 1984. Vol. 283. P. 825—832.
274. *Jakimiec J., Fludra A., Lemen J. R. et al.* Investigations of turbulent motion and particle acceleration in solar flares // *Adv. Space Res.* 1986. Vol. 6. P. 191—194.
275. *Karpman V. I.* An asymptotic solution of Korteweg+de Vries equation // *Phys. Lett. A.* 1967. Vol. 25. P. 708—709.
276. *Kaup D. J., Newel A. C.* An exact solution for a derivative nonlinear Schrödinger equation // *J. Math. Phys.* 1978. Vol. 19. P. 798—801.
277. *Kawata T., Inoue H.* Exact solution of the derivative nonlinear Schrödinger equation under nonvanishing conditions // *J. Phys. Soc. Jap.* 1978. Vol. 44. P. 1968—1977.
278. *Kennel C. F., Edmiston J. P., Scarft F. L. et al.* Structure of the November 12, 1978, quasi-parallel interplanetary shock // *J. Geophys. Res. A.* 1984. Vol. 89. P. 5436—5442.
279. *Kennel C. F., Scarft F. L., Coroniti F. V. et al.* Nonlocal turbulence associated with interplanetary shocks // *Ibid.* 1982. Vol. 87. P. 17—24.
280. *Kerr F. J.* HI in galactic disk // *Large scale characteristics Galaxy* / Ed. W. B. Burton. Dordrecht etc.: Reidel, 1979. P. 61—63. (IAU Symp.; N 84).
281. *Kichatinov L. L.* Turbulent transport of angular momentum and differential rotation // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dyn.* 1986. Vol. 35. P. 93—110.
282. *Kippenhahn R.* Differential rotation in stars with convective envelopes // *Astrophys. J.* 1963. Vol. 137. P. 664—678.
283. *Kleczeck J., Krüger A., Wallis G.* A comment on analogies of magnetic energy conversion in flares and dense plasma focus experiments // *Phys. Solaritter.* Potsdam, 1976. N 1. P. 3—6.
- 283a. *Klein L. W., Burlaga L. F., Ness N. F.* Radial and latitudinal varia-

- tions of the interplanetary magnetic field // *J. Geophys. Res. A.* 1987. Vol. 92. P. 9885—9892.
284. *Kolmogorov A. N.* A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 13. P. 82—85.
 285. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave // *Phil. Mag.* 1885. Vol. 39. P. 442—443.
 286. *Kraichnan R. H.* Internal-range spectrum of hydromagnetic turbulence // *Phys. Fluids.* 1965. Vol. 8, P. 1385—1387.
 287. *Kraichnan R. H.* Diffusion of weak magnetic fields by isotropic turbulence // *J. Fluid Mech.* 1976. Vol. 75. P. 657—676.
 288. *Kraichnan R. H.* Diffusion of passive scalar and magnetic fields by helical turbulence // *Ibid.* 1976. Vol. 77. P. 753—768.
 289. *Kraichnan R. H.* Consistency of the alpha-effect turbulent dynamo // *Phys. Rev. Lett.* 1979. Vol. 42. P. 1677—1680.
 290. *Kraichnan R. H.* Eddy viscosity and diffusivity: exact formulas and approximations: Prepr. Nat. Lab. Los Alamos, 1987. Jan. 24 p.
 291. *Kraichnan R. H.* Some progress in statistical turbulence theory: Prepr. Nat. Lab. Los Alamos, 1987. Feb. 36 p.
 292. *Kraichnan R. H., Montgomery D.* Two-dimensional turbulence // *Rep. Progr. Phys.* 1980. Vol. 43. P. 547—619.
 293. *Kraichnan R. H., Nagarajan S.* Growth of turbulent magnetic fields // *Phys. Fluids.* 1967. Vol. 10. P. 859—870.
 294. *Krishnan V.* A probable initial configuration of a flaring loop // *Plasma Phys.* 1986. Vol. 28. P. 509—510.
 295. *Krivsky L.* Interaction of magnetic fields and the origin of proton flares // *Proc. of IAU Symp. «Structure and Development of Solar Active Regions», Budapest 1967.* Dordrecht, 1968. P. 465—470.
 296. *Larson R. B.* Turbulence and star formation in molecular clouds // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1981. Vol. 194. P. 809—826.
 297. *Lee L. C., Fu Z. F., Akasofu S.-I.* A simulation study of forced reconnection processes and magnetospheric storms and substorms // *J. Geophys. Res. A.* 1985. Vol. 90. P. 10.896—10.910.
 298. *Lepp S., McGray R., Shull J. M.* et al. Thermal phases of interstellar and quasar gas // *Astrophys. J.* 1985. Vol. 288. P. 58—64.
 299. *Lerche I., Vasyliunas M.* Mathematical theory of isothermal blast waves and the question of their applicability to supernova remnants // *Ibid.* 1976. Vol. 210. P. 85—99.
 300. *Livi S. H. B., Wang J., Martin S. F.* The cancellation of magnetic flux. I. On the quiet Sun // *Austral. J. Phys.* 1985. Vol. 38. P. 855—873.
 301. *Lockman F. J., Hobbs L. M., Shull J. M.* The extent of the local HI halo // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 302. P. 280—294.
 302. *Lopez J. M., Murphy J. O.* Dynamo time dependent hexagonal magneto convection // *Austral. J. Phys.* 1985. Vol. 38. P. 885—910.
 303. *Lortz D.* Exact solution of hydromagnetic dynamo problem // *Plasma Phys.* 1968. Vol. 10. P. 967—972.
 304. *Low B. C.* Blow up of force-free magnetic fields in the infinite region of space // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 307. P. 205—212.
 305. *Low B. C., Nakagawa Y.* Dynamics of solar magnetic fields. VI. Force-free magnetic fields and motions of magnetic footpoints // *Ibid.* 1975. Vol. 199. P. 237—246.
 306. *Machado M. E., Moore R. L.* Observed force and action of the magnetic energy release in flares // *Adv. Space. Res.* 1986. Vol. 6. P. 217—226.
 307. *Martin S. F., Wang J., Livi S. H. B.* The cancellation of magnetic flux. II. In a decaying active region // *Austral. J. Phys.* 1985. Vol. 38. P. 929—959.
 308. *Mathis J. S.* The photoionization of the diffuse galactic gas // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 301. P. 423—429.
 309. *Matthaeus W. H., Montgomery D.* Nonlinear evolution of the sheet pinch // *Plasma Phys.* 1981. Vol. 25. P. 11—21.

310. *McGray R., Kafatos M.* Supershells and propagating star formation // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 317. P. 190—196.
311. *McGray R., Snow T. P.* The violent interstellar medium // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1979. Vol. 17. P. 213—240.
312. *McIvor I.* The inertial range of weak magnetohydrodynamic turbulence in the interstellar medium // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1977. Vol. 178. P. 85—99.
313. *McKee C. F., Hollenbach D. J.* Intestellar shock waves // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1980. Vol. 18. P. 219—262.
314. *McKee C. F., Ostriker J. P.* A theory of interstellar medium: three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate // *Astrophys. J.* 1977. Vol. 218. P. 148—169.
315. *McKenzie J. F., Westphal K. O.* Interaction of linear waves with oblique shock waves // *Phys. Fluids.* 1968. Vol. 11. P. 2350—2362.
316. *McKenzie J. F., Westphal K. O.* Interaction of hydromagnetic waves with hydromagnetic shocks // *Ibid.* 1970. Vol. 13. P. 630—640.
317. *Mjølhus E.* On the modulation instability of hydromagnetic waves parallel to the magnetic field // *Plasma Phys.* 1976. Vol. 16. P. 321—334.
318. *Moffatt H. K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines // *J. Fluid Mech.* 1969. Vol. 35, pt 1. P. 117—129.
319. *Moffatt H. K.* The mean electromotive force generated by turbulence in the limit of perfect conductivity // *Ibid.* 1974. Vol. 65. P. 1—10.
320. *Moffatt H. K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge: Univ. press, 1978. 343 p.
321. *Moffatt H. K.* Maynetostatic equilibrium and analogous Euler flows of arbitrarily complex topology. Pt 1. Fundamentals // *J. Fluid Mech.* 1985. Vol. 159. P. 359—378.
322. *Montgomery D., Turner L.* Two-and-a-half-dimensional magnetohydrodynamics turbulence // *Phys. Fluids.* 1982. Vol. 25. P. 345—349.
323. *Nelkin M.* Do the dissipation fluctuations in high Reynolds number turbulence define a universal exponent? // *Ibid.* 1981. Vol. 24. P. 556—557.
324. *O'Dell C. R.* Turbulent motions in Galactic HII regions // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 304. P. 767—770.
325. *Ogden P. M., Reynolds R. J.* A long filament in the faint Galactic HII background // *Ibid.* 1985. Vol. 290. P. 238—243.
326. *Ohyaabu, Hsien C. L., Jensen T. H.* Merging tokamaks // *Plasma Phys.* 1979. Vol. 21. P. 253—257.
327. *Orszag S. A.* Analitical theories of turbulence // *J. Fluid Mech.* 1970. Vol. 41. P. 363—386.
328. *Ovenden C. R., Shah H. A., Schwartz S. J.* Alfven solutions in the solar wind // *J. Geophys. Res. A.* 1983. Vol. 88. P. 6095—6101.
329. *Parker E. N.* Hydromagnetic-dynamo models // *Astrophys. J.* 1955. Vol. 122. P. 293—303.
330. *Parker E. N.* Sweet's mechanism for merging magnetic field in conduction fluids // *J. Geophys. Res.* 1957. Vol. 62. P. 253—257.
331. *Parker E. N.* Topological dissipation and the small-scale fields in turbulent gases // *Astrophys. J.* 1972. Vol. 174. P. 499—510.
332. *Parker E. N.* The reconnection rate of magnetic fields // *Ibid.* 1973. Vol. 180. P. 247—256.
333. *Parker E. N.* Hydraulic concentration of magnetic fields in the solar photosphere. VI. Adiabatic cooling and concentration in downdrafts // *Ibid.* 1978. Vol. 221. P. 368—377.
334. *Parker E. N.* The flux ejection dynamo effect // *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1982. Vol. 20. P. 165—189.
335. *Parker E. N.* The rapid dissipation of magnetic fields in highly conducting fluids // *Ibid.* Vol. 22. P. 195—218.
336. *Parker E. N.* The dynamics of fibrill magnetic fields. I. Effect of flux tubes on convection // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 256. P. 292—301.
337. *Parker E. N.* The dynamics of fibrill magnetic fields. II. The mean field equations // *Ibid.* P. 302—315.

338. *Parker E. N.* Absence of equilibrium among close packed twisted flux tubes // *Geophys. Astrophys. Fluid. Dyn.* 1983. Vol. 23. P. 85—102.
339. *Parker E. N.* Equilibrium of magnetic fields with arbitrary interweaving of the lines of force. I. Discontinuities in the torsion // *Ibid.* 1986. Vol. 34. P. 243—264.
340. *Parker E. N.* The dynamics of magnetic fields in the convective zone of a star. I. General consideration: Prepr. Univ. Chicago, 1986. Jan. 41 p.
341. *Parker E. N.* The dynamic of magnetic fields in the convective zone of a star. II. Thermal shadows: Prepr. Univ. Chicago, 1986. March. 64 p.
342. *Parker E. N.* Magnetic reorientation and the spontaneous formation of tangential discontinuities in deformed magnetic fields // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 318. P. 876—887.
343. *Parker E. N.* Magnetic monopole plasma oscillations and the survival of galactic magnetic fields // *Ibid.* 1987. Vol. 321. P. 349—354.
344. *Parker E. N., Vainshtein S. J.* Magnetic nonequilibrium and current sheet formation // *Ibid.* 1986. Vol. 304. P. 821—827.
345. *Pavula R. F.* Generalization and extensions of the Fokker—Planck—Kolmogorov equation // *IEEE Trans. Inform. Theory.* 1967. Vol. IT-13, N 1. P. 33—41.
346. *Petscheck H. E.* Magnetic field annihilation // *AAS-NASA Sump. on the Phys. of Solar Flares.* NASA SP-50/ Ed. W. W. Hess. N. Y., 1964. P. 425—439.
347. *Pinter S.* Experimental study of flare-generated collisionless interplanetary shock wave propagation // *Space Sci. Rev.* 1982. Vol. 32. P. 145—168.
348. *Pheuman G. W.* Ejection of magnetic fields from the Sun: acceleration of a solar wind containing diamagnetic plasmoids // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 265. P. 468—482.
349. *Priest E. R.* Magnetic reconnection at the Sun // *Magnetic reconnection in space and laboratory plasmas* / Ed. E. W. Honnes (Jun). Wash. (D.C), 1984. P. 63—78.
350. *Priest E. R.* The magnetohydrodynamic of current sheets // *Rep. Progr. Phys.* 1985. Vol. 48. P. 955—1090.
351. *Priest E. R.* Magnetohydrodynamics theories of solar flares // *Solar Phys.* 1986. Vol. 104. P. 1—45.
352. *Pritchett P. L., Wu C. C.* Coalescence of magnetic islands // *Phys. Fluids.* 1979. Vol. 22. P. 2140—2146.
353. *Pudovkin M. I., Zaitseva S. A.* The structure of a flare stream as a function of conditions within the flare region // *Solar maximum analysis workshop.* Irkutsk, 1980. P. 103.
354. *Quang J.* A passive scalar field convected by turbulence // *Phys. Fluids.* 1985. Vol. 28. P. 1299—1304.
355. *Quang J.* A closure theory of intermitting of turbulence // *Ibid.* 1986. Vol. 29. P. 2165—2171.
356. *Rädler K.-H.* Remarks on the Alpha-effect and dynamo action in spherical models // *Stellar and planetary magnetism* / Ed. A. M. Soward. N. Y.: Gordon and Breach, 1983. P. 37—48.
357. *Rädler K.-H.* On nonlinear dynamo models // *Proc. Workshop on Non-linear and Turb. Processes in Phys.* N. Y.: Gordon and Breach, 1984. P. 469—472.
358. *Reynolds R. J.* A measurement of the hydrogen recombination rate in diffuse interstellar medium // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 282. P. 191—196.
359. *Reynolds R. J.* λ 6716 in the Galactic emission-line background // *Ibid.* 1985. Vol. 294. P. 256—262.
360. *Richter A. K., Hsieh K. C., Luttrell A. H.* et al. Review of interplanetary shock phenomena near and within 1 AU // *Collisionless shocks in the heliosphere: Reviews of current research.* Wash. (D.C): Amer. Geophys. Union, 1985. P. 33—50.
361. *Roberts G. O.* Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* 1972. Vol. 271. P. 411—454.
362. *Rüdiger G.* Solar magnetism. On Reynolds stress theories of solar diffe-

- rential rotation // Stellar and planetary magnetism / Ed. A. M. Soward. N. Y.; Paris: Gordon and Breach, 1983. P. 133—150.
363. *Russell C. T., Greenstadt E. W.* Initial ISEE magnetometer results: check observation // Space Sci. Rev. 1979. Vol. 23. P. 3—37.
364. *Ruzmaikin A. A., Vainshtein S. J.* The nature of mechanism of differential rotation in the Sun // Astrophys. and Space Sci. 1978. Vol. 59. P. 215—255.
365. *Sagdeev R. Z.* The 1976 Oppenheimer lectures: Critical problems in plasma astrophysics. I. Turbulence and nonlinear waver. II. Singular layers and reconnection // Rev. Mod. Phys. 1979. Vol. 51. P. 1—20.
366. *Sakai J.-I.* Forced reconnection by fast magnetosonic waves in a current sheet with stagnation-point flows // Plasma Phys. 1983. Vol. 30. P. 109—124.
367. *Sakai J.-I.* Forced reconnection by nonlinear magnetohydrodynamic waves // Solar Phys. 1984. Vol. 91. P. 103—113
368. *Sakai J.-I., Nakajima H., Zaidman E.* et al. Signatures of current loop coalescence in solar flares // Rapid fluctuations in solar flares: Proc. Workshop, Lanham (Md) / Ed. B. R. Dennis, L. E. Orwig. NASA, 1987. P. 393—434.
369. *Sakai J.-I., Nishikawa K.-I.* A model of «disparitions brusques» as an instability driven by MHD waves // Solar. Phys. 1983. Vol. 88. P. 241—255.
370. *Sakai J.-I., Tajima T.* Explosive of current loops and particle acceleration // Proc. Plasma Astrophys. Course and Workshop. Sukhumi, 1986. P. 1—8.
371. *Salpeter E. E.* Energy balance in the interstellar medium // Large scale characteristics Galaxy / Ed. W. B. Burton. Dordrecht etc.: Reidel, 1979. P. 245—252. (IAU Symp.; N 84).
372. *Sanders D. B., Scoville N. Z., Solomon P. M.* Giant molecular cloud in the Galaxy. II. Characteristics of discrete feature, // Astrophys. J. 1985. Vol. 289. P. 373—387.
373. *Scherrer P. H., Bogart R., Hoeksema J. T.* et al. The detection of global convective wave flows on the Sun: Prepr. Centre for Space Sci. and Astrophys. Stanford. Univ. (CSSA—SATRO) N 8—23. Stanford (Cal.), 1985. 10 p.
374. *Schindler K.* Spontaneous reconnection // Magnetic reconnection in space and laboratory plasma / Ed. E. W. Hones (Jun.). Wash. (D. C), 1984. P. 9—19.
375. *Schüssler M.* Stellar dynamo theory // Solar and stellar magnetic fields: Origin and general effects / Ed. J. O. Stenflo. Dordrecht etc.: Reidel, 1983. P. 213—236.
376. *Schüssler M.* On the structure of magnetic fields in the solar convection zone // The hydromagnetics of the Sun. Noordwijkerhout, 1984. P. 67—76.
377. *Scoville N. Z., Min Su Yun, Clemens D. P.* et al. Molecular clouds and cloud cores in the inner Galaxy // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1987. Vol. 63. P. 821—915.
378. *Scudder J. D., Burlaga L. F., Greenstadt E. W.* Scalar lengths in quasi-parallel shocks // J. Geophys. Res. A. 1984. Vol. 89. P. 7545—7550.
379. *Shafranov V. D.* Mixing of plasma columns in a tokamak // Nucl. Fusion. 1979. Vol. 19. P. 187—193.
380. *Sheeley N. R. (Jun), Vere de C. R.* The decay of the mean solar magnetic field // Solar Phys. 1986. Vol. 103. P. 203—224.
381. *Simnet G. M., Harrison R. A.* The onset of the coronal mass ejection // Ibid. 1985. Vol. 99. P. 291—311.
382. *Solinger A., Rappoport S., Buff J.* Isotermal model of supernova remnants // Astrophys. J. 1975. Vol. 201. P. 381—386.
383. *Soward A. M., Priest E. R.* Fast magnetic field-line reconnection in a compressible fluid. 1 Coplanar field lines. 2. Skewed field lines // Plasma Phys. 1982. Vol. 28, pt 2. P. 335—337; pt 3. P. 415—443.
384. *Spitzer L.* Acoustic waves in supernova remnants // Astrophys. J. 1982. Vol. 262. P. 315—321.

385. *Spruit H. C.* Theory of photospheric magnetic fields // Solar and stellar magnetic fields: Origin and coronal effects / Ed. J. O. Stenflo. Dordrecht etc.: Reidel, 1983. P. 41—60.
386. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* A calculation of the mean EMF in an electrically conducting fluid in turbulent motion // *Ztschr. Naturforsch. A.* 1966. Bd. 21. S. 369—376.
387. *Stenflo J. O.* Small-scale magnetic fields: basic mechanism of solar activity // Basic mechanism of solar activity / Ed. Y. Bumba, J. Kleczek. Dordrecht, 1976. P. 701—714. (Proc. Symp. IAU; N 71).
388. *Stenzel R. L., Gekelman W.* Magnetic fields line reconnection experiments. 1. Field topologies // *J. Geophys. Res. A.* 1981. Vol. 86. P. 649—660.
389. *Sturrock P. A.* Flare models // Solar flares / Ed. P. A. Sturrock. (Colo.) Assoc. Univ. press, 1980. P. 411—449.
390. *Sturrock P. A.* Rapid fluctuations in solar flares // Rapid fluctuations in Solar flares. Proc. Workshop, Lanham (Md) / Ed. B. R. Dennis, L. B. Orwig. NASA, 1987. P. 1—28.
391. *Sweet P. A.* The neutral point theory of solar flares // Proc. IAU Symp. of Electromagn. Phenomena in Cosmic Plasma. N. Y., 1958. P. 123—131.
392. *Syrovatskii S. I.* Pinch sheets and reconnection in astrophysics // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1981. Vol. 19. P. 163—229.
393. *Tajima T., Brunel F., Sakai J.-I.* Loop coalescence in flares and coronal X-ray brightening // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 258. P. L45—L48.
394. *Tajima T., Brunel F., Sakai J.-I.* et al. The coalescence instability of solar flares // *Bull. Eng. Toyama Univ.* 1984. P. 64—74.
395. *Takahara F.* Magnetic flare model of quasars and active galactic nuclei // *Progr. Theor. Phys.* 1979. Vol. 62. P. 629—643.
396. *Toptygin I. N.* Cosmic rays in interplanetary magnetic fields. Dordrecht: Reidel, 1985. 375 p.
397. *Tsinober A., Levich E.* On the helical nature of three-dimensional coherent structures in turbulent flows // *Phys. Lett. A.* 1983. Vol. 99. P. 321—324.
398. *Vainshtein S. I., Kichatinov L. L.* The dynamics of magnetic fields in a highly conducting turbulent medium and generalized Kolmogorov—Fokker—Plank equation // *J. Fluid Mech.* 1986. Vol. 168. P. 73—87.
399. *Vainshtein S. L., Mazur V. A.* Tearing instability in a neutral sheet with temperature anisotropy // *Plasma Phys.* 1982. Vol. 24. P. 965—975.
- 399a. *Vellante M., Lazarus A. J.* An analysis of solar wind fluctuations between 1 and 10 AU // *J. Geophys. Res. A.* 1987. Vol. 92. P. 9893—9900.
400. *Weaver R., McGray R., Castor J.* et al. Interstellar bubbles. II. Structure and evolution // *Astrophys. J.* 1977. Vol. 218. P. 377—395.
401. *Weiss N. O.* The expulsion of magnetic flux by eddies // *Proc. Roy. Soc. London A.* 1966. Vol. 293. P. 310—328.
402. *Woo R. W., Armstrong J. W.* Spacecraft radio scattering observations of the power spectrum of electron density fluctuations in the solar wind // *J. Geophys. Res. A.* 1979. Vol. 84. P. 7288—7296.
403. *Wu S. T., Chang H. M., Haguard M. J.* On the numerical computation of nonlinear force-free magnetic fields // Proc. MSFC Workshop «Measurement of Solar Vector Magnetic Fields» / Ed. M. J. Haguard. Huntsville, 1985. P. 17—48.
404. *Wu S. T., Hu Y. Q., Krall K. P.* et al. Modeling of energy buildup for a flare-productive region // *Solar Phys.* 1984. Vol. 90. P. 117—131.
405. *Wu F., Low B. C.* Static current sheet models of quiescent prominences // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 312. P. 431—443.
406. *Yorke H. W.* The dynamical evolution of HII regions. Recent theoretical developments // *Annu. Rev. Astron. and Astrophys.* 1986. Vol. 24. P. 49—87.
407. *Yoshimura H.* Solar cycle general magnetic fields of 1955—1974 and dynamical structure of the convection zone // *Solar Phys.* 1976. Vol. 47. P. 581—600.
408. *Zweibel E. G., Li H.-S.* The formation of current sheet in the solar atmosphere // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 312. P. 423—430.
409. *Zwingam W., Schindler K., Birn J.* On sheared magnetic field structures containing neutral points // *Solar Phys.* 1995. Vol. 99. P. 133—143.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Глава 1. КОСМИЧЕСКАЯ ПЛАЗМА В ТИПИЧНЫХ УСЛОВИЯХ	5
1.1. Основные уравнения космической электродинамики	5
1.2. Специфика космических полей	14
1.3. Наиболее распространенные магнитные конфигурации	19
1.4. Магнитные поля в движущейся плазме	22
1.5. Плазма как сплошная среда. Лагранжево описание	25
1.6. Токи в космической плазме	29
Глава 2. ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ	32
2.1. Простые волны в магнитной гидродинамике	32
2.2. Линейные моды и их свойства	37
2.3. Затухание МГД-волн	40
2.4. МГД-волны в бесстолкновительной плазме	42
2.5. Сильные МГД-разрывы и их классификация	45
2.6. Ударные волны	48
2.7. Плазменные неустойчивости	52
2.8. Турбулентность космической плазмы	56
2.9. Токовые слои	58
Глава 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОГО ПОЛЯ И КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ДИНАМО	62
3.1. Уменьшение масштаба поля	62
3.2. Постановка задачи кинематического динамо	64
3.3. Динамо-теории	67
3.4. Модели динамо	68
3.5. Успехи и трудности ламинарных динамо-моделей	69
Глава 4. ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО	76
4.1. Основные сведения о турбулентности	76
4.2. Нетрадиционная турбулентность	78
4.3. Новые представления о природе турбулентности	84
4.4. Лагранжево описание турбулентности	86
4.5. Кинетические уравнения	88
4.6. Обобщенные уравнения Колмогорова—Фоккера—Планка и теория турбулентности	90
4.7. Многочастичные функции распределения и перемежаемость	92
4.8. Динамика магнитных полей. Быстрая диссипация	93
4.9. Уравнения для магнитных полей	95
4.10. Турбулентное динамо мелкомасштабных полей	96
4.11. Мелкомасштабные поля в космических условиях	99

	4.12.	Крупномасштабные поля: кинематика	102
	4.13.	Крупномасштабные поля: макроскопическая МГД	105
	4.14.	Поля промежуточных масштабов. Краевые эффекты	107
Глава	5.	ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ НЕРАВНОВЕСИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ТОКОВЫЕ СЛОИ	113
	5.1.	«Подводные камни» упрощенного подхода к вопросу формирования токовых слоев	113
	5.2.	Магнитные нулевые точки и пересоединение силовых линий	117
	5.3.	Топологическое неравновесие (магнитное неравновесие). Тороидальные поля	118
	5.4.	Основные свойства равновесия при наличии нулевых линий	121
	5.5.	Потеря равновесия вытянутых магнитных конфигураций	124
	5.6.	Бессилловые поля	127
	5.7.	Бессилловые поля: потеря равновесия	129
	5.8.	Топологическая инвариантность	134
	5.9.	Динамика магнитных облаков и плазмидов в солнечном ветре	136
	5.10.	Равновесие скрученных магнитных трубок: роль продольного поля	141
	5.11.	Слияние магнитных островов	144
	5.12.	Магнитные поля в стратифицированных средах: учет силы тяжести	148
Глава	6.	РЕАЛИЗАЦИЯ ТОКОВЫХ СЛОЕВ	152
	6.1.	Потеря равновесия и неустойчивость	152
	6.2.	Направление процесса пересоединения	154
	6.3.	Реализация неустойчивостей и потеря равновесия в астрофизических условиях	157
	6.4.	Скорость процесса пересоединения	161
	6.5.	Квазистационарные токовые слои и накопление энергии	165
	6.6.	Токовые слои и микротурбулентность	167
	6.7.	МГД-турбулентность и токовые слои	169
	6.8.	Синергетические свойства	171
	6.9.	Моделирование токовых слоев	172
	6.10.	Способы формирования токовых слоев. Классификация	174
Глава	7.	МАГНИТОГИДРОДИНАМИКА СОЛНЦА (С ВКЛЮЧЕНИЕМ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ ДАЛЬНЕЙ АСТРОФИЗИКИ)	177
	7.1.	Перемешивание солнечных недр	177
	7.2.	Конвективная зона: дифференциальное вращение	178
	7.3.	Конвективная зона: динамо	182
	7.4.	Галактики, звезды и все такое	187
	7.5.	Природа солнечных фотосферных магнитных полей	189
	7.6.	Сверхтонкая структура	192
	7.7.	Спикулы и серджи. Рентгеновские яркие точки	198
	7.8.	К теории солнечных вспышек	199
	7.9.	Открытие и замкнутые конфигурации. Транзиенты	203
	7.10.	Протуберанцы	205

Глава 8. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ	209
8.1. Уравнение Бюргерса	209
8.2. Профиль параллельной ударной волны	211
8.3. Профиль перпендикулярной ударной волны	213
8.4. Роль дисперсионных эффектов. Уравнение Кортевега—де Фриса—Бюргерса	215
8.5. Нелинейные периодические волны и солитоны в холодной плазме	218
8.6. Осцилляционная структура диссипативной ударной волны	222
8.7. Нелинейные волны в горячей плазме. Нелинейное уравнение Шрёдингера	224
8.8. Стационарные нелинейные волны в горячей плазме	228
8.9. Двумерные и трехмерные солитоны. Проблема устойчивости нелинейных волн	232
8.10. Бесстолкновительные ударные волны. Модели бесстолкновительных ударных волн	234
Глава 9. ГЕНЕРАЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН	237
9.1. Эволюция нелинейного возмущения в плазме и образование солитонов	237
9.2. Формирование и распространение ударных волн. Автомодельные и асимптотические решения	245
9.3. Взаимодействие ударных волн со слабыми и сильными неоднородностями	255
9.4. Распространение ударных волн в случайно-неоднородной среде	260
9.5. Ударные волны и турбулентность в межпланетной среде	264
Глава 10. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И ДИНАМИКА МЕЖЗВЕЗДНОЙ СРЕДЫ	270
10.1. Структура межзвездной среды	270
10.2. Источники ударных волн в Галактике	275
10.3. Функция распределения ударных волн в межзвездной среде	277
10.4. Спектр турбулентности, создаваемой ударными волнами	282
10.5. Генерация вихревых и звуковых ветвей турбулентного спектра ансамблем ударных волн	285
ЛИТЕРАТУРА	290

CONTENTS

PREFACE	3
Chapter 1. COSMICAL PLASMA IN TYPICAL CONDITIONS	5
1.1. Basic equations of cosmical electrodynamics	5
1.2. Specific character of cosmical fields	14
1.3. Widespread magnetic configurations	19
1.4. Magnetic fields in a moving plasma	22
1.5. Plasma as a continuous medium. Lagrangian approach	25
1.6. Currents in cosmical plasma	29
Chapter 2. COSMICAL PLASMA EXCITATIONS	32
2.1. Simple waves in magnetohydrodynamics	32
2.2. Linear modes, their properties	37
2.3. Magnetohydrodynamic waves damping	40
2.4. Magnetohydrodynamic waves in collisionless plasma	42
2.5. Strong MHD discontinuities, their classification	45
2.6. Shocks	48
2.7. Plasma instabilities	52
2.8. Turbulence of cosmical plasma	56
2.9. Current sheets	58
Chapter 3. WEAK FIELD APPROXIMATION AND KINEMATIC DYNAMO	62
3.1. Field scale decrease	62
3.2. Statement of kinematic dynamo problem	64
3.3. Dynamo theories	67
3.4. Dynamo models	68
3.5. Successes and difficulties of laminar dynamo models	68
Chapter 4. TURBULENT DYNAMO	76
4.1. Main knowledge on turbulence	76
4.2. Nonconventional turbulence	78
4.3. New ideas on the turbulence nature	84
4.4. Lagrangian approach in turbulence	86
4.5. Kinetic equations	88
4.6. Generalized Kolmogorov—Fokker—Planck equations and turbulence theory	90
4.7. Multivariate distribution functions and intermittency	92
4.8. Magnetic fields dynamics. Quick dissipation	93
4.9. Equations for magnetic fields	95
4.10. Small scale turbulent dynamo	96
4.11. Small scale magnetic fields in the space	99

4.12.	Large scale magnetic fields: kinematics	102
4.13.	Large scale fields: macroscopic MHD	105
4.14.	The fields of intermediate scales. Edge effects. . .	107
Chapter 5.	MAGNETIC NONEQUILIBRIUM AND CURRENT SHEETS	113
5.1.	«Reefs» of a simplified approach to the current sheet formation problem	113
5.2.	Magnetic zero points and field line reconnection .	117
5.3.	Topological nonequilibrium (magnetic nonequilibrium)	118
5.4.	Special properties of equilibrium in the presence of zero lines	121
5.5.	Loss of equilibrium of elongated magnetic configurations	124
5.6.	Force-free fields	127
5.7.	Force-free fields: equilibrium loss	129
5.8.	Topological nonvariance	134
5.9.	Magnetic clouds and plasmoids dynamics in the solar wind	136
5.10.	Twisted magnetic tubes equilibrium: the role of the longitudinal field	141
5.11.	Merging of magnetic islands	144
5.12.	Magnetic fields in a stratified medium: taking into account the gravity	148
Chapter 6.	CURRENT SHEETS REALIZATION	152
6.1.	Equilibrium loss and instability	152
6.2.	Direction of the reconnection process	154
6.3.	Realization of instabilities and equilibrium loss in the astrophysics	157
6.4.	The reconnection rate	161
6.5.	Quasi-stationary current sheets and energy storage	165
6.6.	Current sheets and plasma turbulence	167
6.7.	MHD turbulence and current sheets	169
6.8.	Synergetic properties	171
6.9.	Current sheets modelling	172
6.10.	The ways of current sheets formation. Classification	174
Chapter 7.	SOLAR MAGNETOHYDRODYNAMICS (INCLUDING SOME QUESTIONS OF FAR ASTROPHYSICS)	177
7.1.	Solar interior mixing	177
7.2.	Convection zone: differential rotation	178
7.3.	Convection zone: dynamo	182
7.4.	Galaxies, stars and so on	187
7.5.	The nature of the solar photosphere magnetic fields	189
7.6.	Superfine structure	192
7.7.	Spiculae and surges. X-ray bright points	198
7.8.	On the solar flares theory	199
7.9.	Open and closed configurations. Transients	203
7.10.	Solar prominence	205

Chapter 8. NONLINEAR WAVES IN PLASMA	209
8.1. The Burgers equation	209
8.2. The structure of parallel shock wave	211
8.3. The structure of perpendicular shock wave	213
8.4. The role of dispersion. The Korteweg—de Vries— Burgers equation	215
8.5. Periodical nonlinear waves and solitons in a cold plasma	218
8.6. The oscillation structure of dissipative shock wave	222
8.7. Nonlinear waves in a hot plasma. The derivative nonlinear Schrödinger equation	224
8.8. Stationary nonlinear waves in a hot plasma	228
8.9. Two and three dimensional solitons. Nonlinear wa- ves stability problem	232
8.10. Collisionless shock waves. Model of collisionless shock waves	234
Chapter 9. GENERATION AND PROPAGATION OF NON- LINEAR WAVES	237
9.1. The evolution of nonlinear perturbations and soli- tons generation	237
9.2. Generation and propagation of shock waves. Self- similar and asymptotical solutions	245
9.3. Shock interaction with weak and strong inhomoge- neities	255
9.4. Shock waves propagation in a turbulent medium	260
9.5. Shock waves and turbulence in the interplanetary medium	264
Chapter 10. SHOCK WAVES AND INTERSTELLAR MEDI- UM DYNAMICS	270
10.1. Interstellar medium structure	270
10.2. Shock waves sources in the Galaxy	275
10.3. Shock waves distribution function for interstellar medium	277
10.4. Turbulence spectrum formation by shock waves	282
10.5. Vortex and acoustic turbulence formation by shock waves ensemble	285
REFERENCES	290